Infinity, Paradox, and the Limits of Thoughts

Jason Chen

Department of Logic and Philosophy of Science, UC Irvine

jasonchen0325@gmail.com

内容一览

1. 基本概念
   - 我们如何比较大小
   - 比较无限集合的大小
2. 对角线论证
   - 一个问题
   - 反证法
   - 康托尔的对角线论证 (Cantor's Diagonal Argument)
3. 算术以外的应用
   - 对角线的抽象化
   - 语言的界限: 塔斯基不可定义定理
   - 数学证明的界限: 哥德尔第一不完全定理
   - 计算机的界限: 图灵停机问题

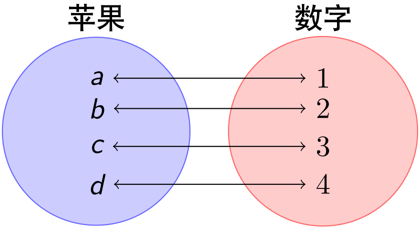
一个简单的问题

- 我们是如何数数的？给定两个集合，我们应该如何比较他们的大小？

一个简单的问题

- 我们是如何数数的？给定两个集合，我们应该如何比较他们的大小？
- 我们可以思考一下我们怎么数手里的苹果

数苹果



一个简单的问题

- 我们是如何数数的？给定两个集合，我们应该如何比较他们的大小？
- 我们可以思考一下我们怎么数手里的苹果
- 我们对“数量”，“大小”，“多少”的概念正是从这种一一对应中来的.

定义

为了严格探讨这些概念，我们现在定义什么叫“一样多”

Definition

“两样东西一样多”，或“两个集合一样大”，意思是我们有办法将这两个集合的东西一一对应起来.

定义

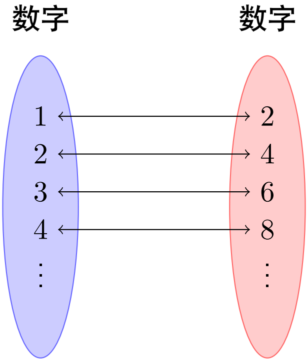
为了严格探讨这些概念，我们现在定义什么叫“一样多”

Definition

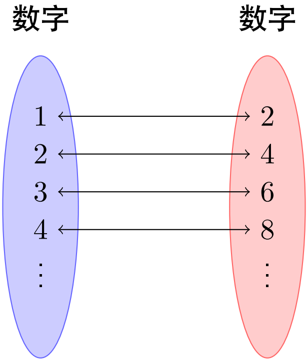
“两样东西一样多”，或“两个集合一样大”，意思是我们有办法将这两个集合的东西一一对应起来.

上面的定义中，我们并没有将“集合”限制为“有限集合”. 这意味着我们可以将这个定义应用在比较无限集合的大小上.

自然数跟偶数一样多

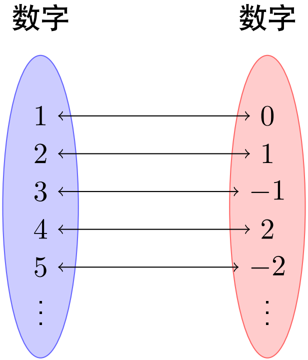


自然数跟偶数一样多

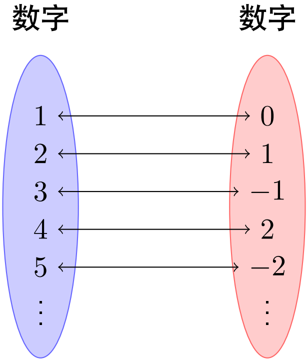


$$x \iff 2x$$

自然数跟整数一样多



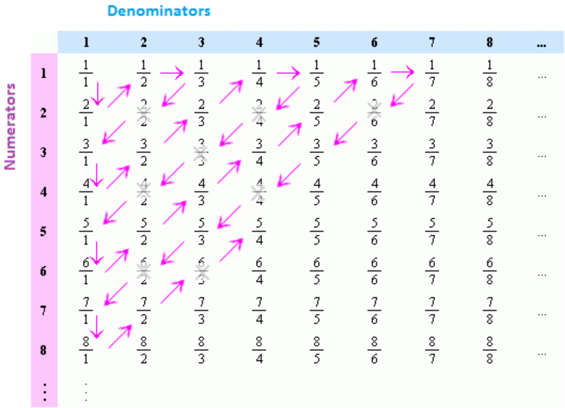
自然数跟整数一样多



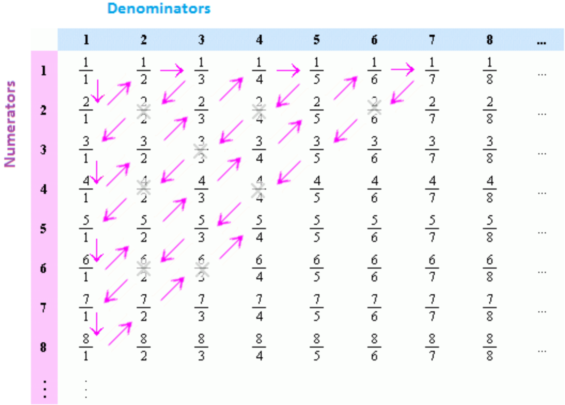
偶数 x: $x \Longleftrightarrow \dfrac{x}{2}$

奇数 x: $x \Longleftrightarrow \dfrac{-(x-1)}{2}$

自然数跟（正）有理数一样多



自然数跟 (正) 有理数一样多



具体对应方法会用到一些较为复杂的数学，但基本思想就是：每一个正有理数都能通过有限的步数走到.

问题

到现在为止，我们能想到的无限大好像都是一样大的. 会不会“无限大”的意思就是单纯的“不受限制”的意思，而且这个概念本身并没有什么值得研究的意义呢？

问题

到现在为止，我们能想到的无限大好像都是一样大的．会不会“无限大”的意思就是单纯的“不受限制”的意思，而且这个概念本身并没有什么值得研究的意义呢？
几千年来，大家都是这么认为的．直到 19 世纪末，德国数学家康托尔 (Georg Cantor 1845-1918) 提出了一条革命性的见解...

管道清理

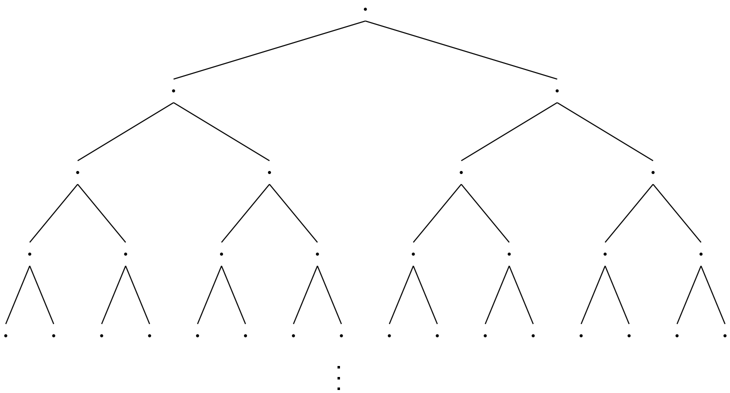
假设你是你个下水道清理公司的老板. 你的公司特别大, 你管理的下水道清洁工人数跟自然数一样多. 我们用 $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$. 来表示这些清洁工人.

管道清理

假设你是你个下水道清理公司的老板. 你的公司特别大, 你管理的下水道清洁工人数跟自然数一样多. 我们用 $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots.$ 来表示这些清洁工人.
有一天, 你收到了一笔大订单. 有一个庞大的水管系统需要你的公司来清洁. 这个水管系统向下分支为很多层, 它的层数跟自然数一样多. 从第一层开始, 每一层的每一个支点都会在上一层的基础上分叉为两个新的管道.

管道

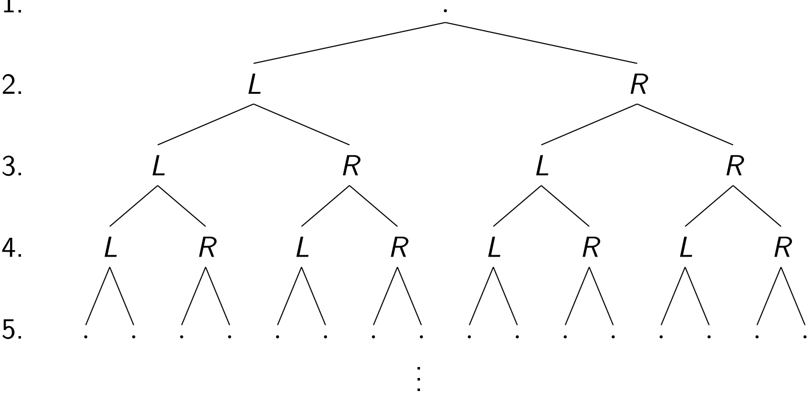
1.
2.
3.
4.
5.



路径

从第一层进入管道开始, 在每一层的每一个节点, 水管走向都可以是左或右. 我们用 L 表示左, R 表示右.

L/R



路径

从第一层开始，我们可以描述某条管道每一层的走向是 L 还是 R

路径

从第一层开始，我们可以描述某条管道每一层的走向是 L 还是 R

这个管道体系里的 “路径”，指的就是一条 L/R 的序列

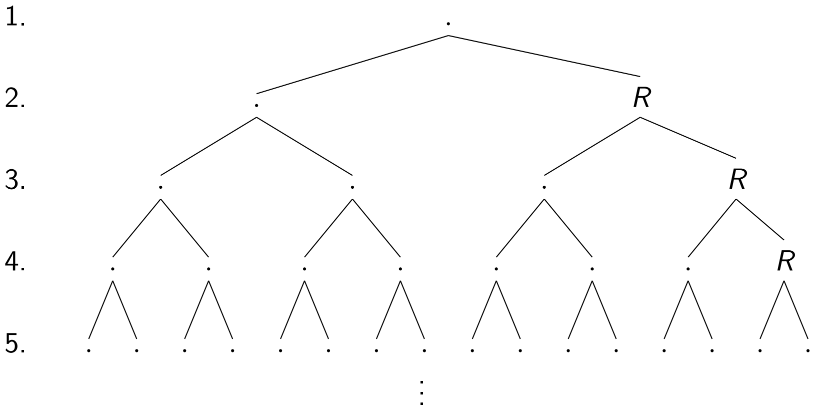
路径

从第一层开始，我们可以描述某条管道每一层的走向是 L 还是 R

这个管道体系里的 “路径”，指的就是一条 L/R 的序列

例：RRRRRRRRRRRR.... 就是一条每一层都往右走的路径

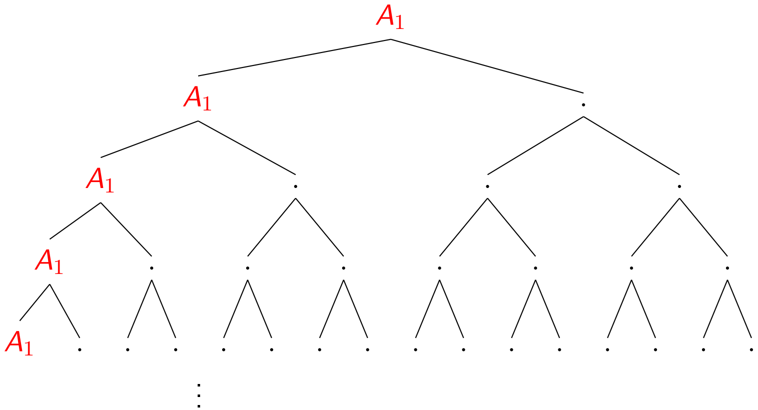
例子



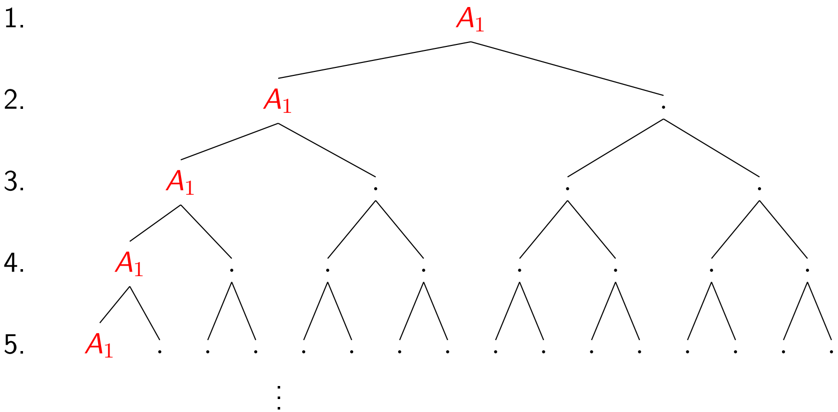
管道清理

为了清理这个管道，你的工人需要从第 1 层处的入口进入，并且每一个节点他都只能在 (左，右) 两个分支中选择一条来继续清理.
同时，因为清理这些管道非常花时间，一个员工进去了水管就不会再出来了.

1.
2.
3.
4.
5.

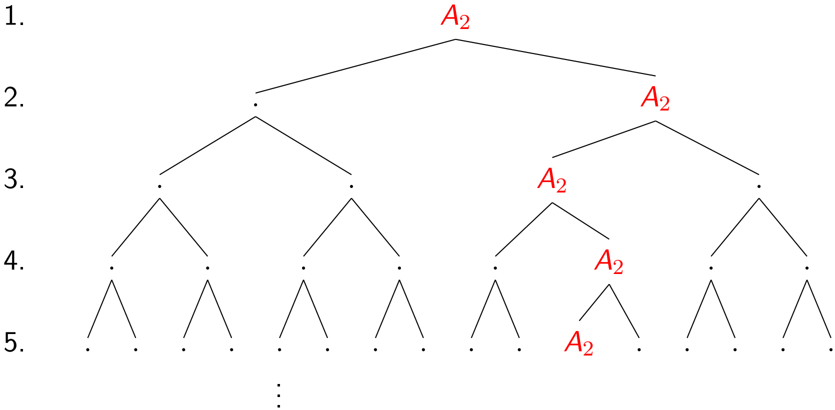


例子

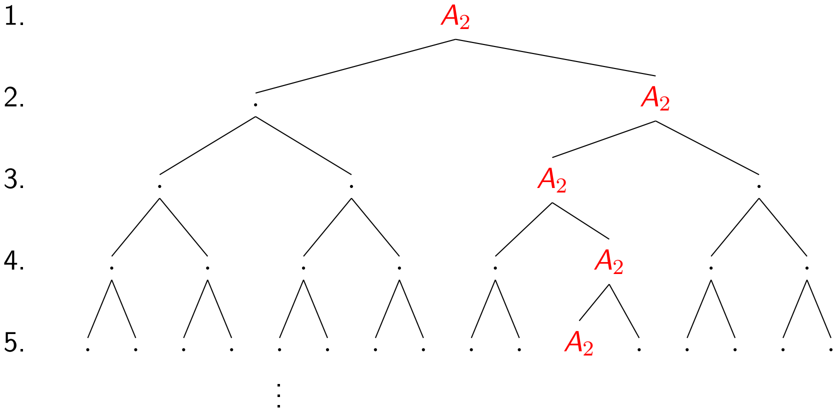


员工 A_1 清理的就是 LLLLLLLL.... 这条路径

管道



管道



员工 A_2 清理的就是 RLRL... 这条路径

问题

我们能不能确保所有的路径都被某个员工清理到?

向左走, 向右走

我们可以精简一下我们的表述方式: 把员工在每一层走的方向做成一个表格. 例:

员工/层数		1	2	3	4	5	6	7	8	9
A_1	$\to$	L	R	L	L	L	L	R	R	L
A_2	$\to$	L	L	L	L	L	L	L	L	L
A_3	$\to$	L	R	L	L	L	L	R	R	L
A_4	$\to$	L	L	L	L	L	L	L	L	L
A_5	$\to$	L	R	L	L	L	L	R	R	L
A_6	$\to$	L	L	L	L	L	L	L	L	L
$\ldots$	$\ddots$					$\vdots$				

问题

因为每一条路径都能被一个像上面这样的 “L/R” 序列描述. 这样一来, 我们的问题就可以被简化为:

问题

因为每一条路径都能被一个像上面这样的 “L/R” 序列描述. 这样一来, 我们的问题就可以被简化为:

员工的人数和所有 “L/R” 序列的数量 (也就是路径的数量) 是不是一样多?

反证法

康托尔回答并且证明了: 不是.

反证法

康托尔回答并且证明了：不是.

我们接下来将会看到为什么不是.

反证法

康托尔回答并且证明了：不是.

我们接下来将会看到为什么不是.

“等一下，我们要证明的是什么？”

反证法

前文我们说到:

Definition

“两样东西一样多”, 或 “两个集合一样大”, 意思是我们有办法将这两个集合的东西一一对应起来.

反证法

前文我们说到:

Definition

“两样东西一样多”, 或 “两个集合一样大”, 意思是我们有办法将这两个集合的东西一一对应起来.

也就是说, 要证明两个集合 “不一样大”, 我们需要证明 “不可能有”/“不存在” 这样一个办法.

要证明一个办法存在很简单: 直接展示出来就好了. 可是我们要怎么样证明一个东西不存在, 或者证明一件事情是不可能的呢?

一条逻辑法则

逻辑学上有一条法则可以帮助我们，那就是:

反证法

如果我们从一个假设出发，根据我们已有的信息进行逻辑推理，最后达到了一个自相矛盾的结论，那么我们就可以认为我们一开始的假设是错误的.

例子

谁在家里

小明回到家里，发现家门口有一双鞋，这就说明家里来了客人．小明知道：

1. 今天只有可能小王和小张来家里作客
2. 小王的鞋子是 40 码的
3. 小张的鞋子是 43 码的
4. 如果一双鞋子是 43 码的，那这双鞋子就不是 40 码的
5. 门口的鞋子是 43 码的

例子

谁在家里

小明回到家里, 发现家门口有一双鞋, 这就说明家里来了客人. 小明知道:

1. 今天只有可能小王和小张来家里作客
2. 小王的鞋子是 40 码的
3. 小张的鞋子是 43 码的
4. 如果一双鞋子是 43 码的, 那这双鞋子就不是 40 码的
5. 门口的鞋子是 43 码的

小明可以通过反证法来推理出今天家里的客人是小张

例子

谁在家里

小明回到家里，发现家门口有一双鞋，这就说明家里来了客人．小明知道：

1. 今天只有可能小王和小张来家里作客
2. 小王的鞋子是 40 码的
3. 小张的鞋子是 43 码的
4. 如果一双鞋子是 43 码的，那这双鞋子就不是 40 码的
5. 门口的鞋子是 43 码的

小明可以通过反证法来推理出今天家里的客人是小张

- 假设今天来家里的人是小王

例子

谁在家里

小明回到家里，发现家门口有一双鞋，这就说明家里来了客人．小明知道:

1. 今天只有可能小王和小张来家里作客
2. 小王的鞋子是 40 码的
3. 小张的鞋子是 43 码的
4. 如果一双鞋子是 43 码的，那这双鞋子就不是 40 码的
5. 门口的鞋子是 43 码的

小明可以通过反证法来推理出今天家里的客人是小张

- 假设今天来家里的人是小王
- 那么因为 2，我们知道门口的鞋子应该是 40 码的

例子

谁在家里

小明回到家里，发现家门口有一双鞋，这就说明家里来了客人．小明知道：

1. 今天只有可能小王和小张来家里作客
2. 小王的鞋子是 40 码的
3. 小张的鞋子是 43 码的
4. 如果一双鞋子是 43 码的，那这双鞋子就不是 40 码的
5. 门口的鞋子是 43 码的

小明可以通过反证法来推理出今天家里的客人是小张

- 假设今天来家里的人是小王
- 那么因为 2，我们知道门口的鞋子应该是 40 码的
- 根据 5，我们知道门口的鞋子是 43 码的；并且根据 4，我们知道门口的鞋子不是 40 码的

例子

谁在家里

小明回到家里，发现家门口有一双鞋，这就说明家里来了客人．小明知道：

1. 今天只有可能小王和小张来家里作客
2. 小王的鞋子是 40 码的
3. 小张的鞋子是 43 码的
4. 如果一双鞋子是 43 码的，那这双鞋子就不是 40 码的
5. 门口的鞋子是 43 码的

小明可以通过反证法来推理出今天家里的客人是小张

- 假设今天来家里的人是小王
- 那么因为 2，我们知道门口的鞋子应该是 40 码的
- 根据 5，我们知道门口的鞋子是 43 码的；并且根据 4，我们知道门口的鞋子不是 40 码的
- 这是一个自相矛盾的结论，所以我们一开始的假设是错误的．也就是说今天家里来的人不是小王，而是小张

例子

证明: 不存在最大的自然数.

例子

证明: 不存在最大的自然数.

- 假设存在最大的自然数. 我们把它写作 n
- 根据算术知识, 我们知道$n+1$ 大于 n.

例子

证明: 不存在最大的自然数.

- 假设存在最大的自然数. 我们把它写作 n
- 根据算术知识, 我们知道$n+1$ 大于 n.
- 我们也知道, 如果 n 是自然数, 那么 $n+1$ 也是自然数

例子

证明: 不存在最大的自然数.

- 假设存在最大的自然数. 我们把它写作 n
- 根据算术知识, 我们知道$n+1$ 大于 n.
- 我们也知道, 如果 n 是自然数, 那么 $n+1$ 也是自然数
- 因为 $n+1$ 是自然数, 而 n 又是最大的自然数, 所以$n+1$ 不大于 n.

例子

证明: 不存在最大的自然数.

- 假设存在最大的自然数. 我们把它写作 n
- 根据算术知识, 我们知道 $n+1$ 大于 n.
- 我们也知道, 如果 n 是自然数, 那么 $n+1$ 也是自然数
- 因为 $n+1$ 是自然数, 而 n 又是最大的自然数, 所以 $n+1$ 不大于 n.
- 这是一个自相矛盾的结论, 所以我们一开始的假设是错误的. 也就是说不存在最大的自然数.

回到我们的问题上

我们想问的是，管道清理公司的员工 $(A_1, A_2, A_3, \ldots)$ 的数量跟路径 (“LLLLLL...”, “LRLRLRLRLRRR...” “RLRRLRRRL...”, ...) 的数量是不是一样多.

回到我们的问题上

我们想问的是，管道清理公司的员工 $(A_1, A_2, A_3, ...)$ 的数量跟路径 (“LLLLLL...”, “LRLRLRLRLRRR...” “RLRRLRRRL...”, ...) 的数量是不是一样多.

康托尔的回答是：不一样多.

回到我们的问题上

我们想问的是，管道清理公司的员工 $(A_1, A_2, A_3, ...)$ 的数量跟路径 (“LLLLLL...”, “LRLRLRLRLRRR...” “RLRRLRRRL...”, ...) 的数量是不是一样多.

康托尔的回答是：不一样多.

我们可以用反证法来证明这个事实.

对角线论证

假设管道公司员工数量跟路径数量一样多 (也就是说, 有某种办法让员工跟路径一一对应).

对角线论证

假设管道公司员工数量跟路径数量一样多 (也就是说, 有某种办法让员工跟路径一一对应).
我们将从这个假设出发, 通过推导, 最终将得到一个自相矛盾的结论.

对角线论证

我们假设了有一种一一对应的方法，但我们不知道这个方法具体长什么样.

对角线论证

我们假设了有一种一一对应的方法，但我们不知道这个方法具体长什么样.不过没关系，我们可以把这种方法用符号的表述方式写下来:

对角线论证

我们假设了有一种一一对应的方法，但我们不知道这个方法具体长什么样.不过没关系，我们可以把这种方法用符号的表述方式写下来:

员工/层数		1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
A_1	$\Longleftrightarrow$	$A_1(1)$	$A_1(2)$	$A_1(3)$	$A_1(4)$	$A_1(5)$	$A_1(6)$	$A_1(7)$	$A_1(8)$	$A_1(9)$	
A_2	$\Longleftrightarrow$	$A_2(1)$	$A_2(2)$	$A_2(3)$	$A_2(4)$	$A_2(5)$	$A_2(6)$	$A_2(7)$	$A_2(8)$	$A_2(9)$	
A_3	$\Longleftrightarrow$	$A_3(1)$	$A_3(2)$	$A_3(3)$	$A_3(4)$	$A_3(5)$	$A_3(6)$	$A_3(7)$	$A_3(8)$	$A_3(9)$	
A_4	$\Longleftrightarrow$	$A_4(1)$	$A_4(2)$	$A_4(3)$	$A_4(4)$	$A_4(5)$	$A_4(6)$	$A_4(7)$	$A_4(8)$	$A_4(9)$	
A_5	$\Longleftrightarrow$	$A_5(1)$	$A_5(2)$	$A_5(3)$	$A_5(4)$	$A_5(5)$	$A_5(6)$	$A_5(7)$	$A_5(8)$	$A_5(9)$	
A_6	$\Longleftrightarrow$	$A_6(1)$	$A_6(2)$	$A_6(3)$	$A_6(4)$	$A_6(5)$	$A_6(6)$	$A_6(7)$	$A_6(8)$	$A_6(9)$	
A_7	$\Longleftrightarrow$	$A_7(1)$	$A_7(2)$	$A_7(3)$	$A_7(4)$	$A_7(5)$	$A_7(6)$	$A_7(7)$	$A_7(8)$	$A_7(9)$	
A_8	$\Longleftrightarrow$	$A_8(1)$	$A_8(2)$	$A_8(3)$	$A_8(4)$	$A_8(5)$	$A_8(6)$	$A_8(7)$	$A_8(8)$	$A_8(9)$	
A_9	$\Longleftrightarrow$	$A_9(1)$	$A_9(2)$	$A_9(3)$	$A_9(4)$	$A_9(5)$	$A_9(6)$	$A_9(7)$	$A_9(8)$	$A_9(9)$	
$\vdots$	$\ddots$					$\vdots$					
A_n	$\Longleftrightarrow$	$A_n(1)$	$A_n(2)$	$A_n(3)$	$A_n(4)$	$A_n(5)$	$A_n(6)$	$A_n(7)$	$A_n(8)$	$A_n(9)$	
$\vdots$	$\ddots$					$\vdots$					

解释: $A_1(5)$ 表示的是第 1 个员工在第 5 层所选择的方向 (L 或 R 其中一者).

对角线论证

我们假设了有一种一一对应的方法，但我们不知道这个方法具体长什么样.不过没关系，我们可以把这种方法用符号的表述方式写下来:

员工/层数		1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
A_1	$\Longleftrightarrow$	$A_1(1)$	$A_1(2)$	$A_1(3)$	$A_1(4)$	$A_1(5)$	$A_1(6)$	$A_1(7)$	$A_1(8)$	$A_1(9)$	
A_2	$\Longleftrightarrow$	$A_2(1)$	$A_2(2)$	$A_2(3)$	$A_2(4)$	$A_2(5)$	$A_2(6)$	$A_2(7)$	$A_2(8)$	$A_2(9)$	
A_3	$\Longleftrightarrow$	$A_3(1)$	$A_3(2)$	$A_3(3)$	$A_3(4)$	$A_3(5)$	$A_3(6)$	$A_3(7)$	$A_3(8)$	$A_3(9)$	
A_4	$\Longleftrightarrow$	$A_4(1)$	$A_4(2)$	$A_4(3)$	$A_4(4)$	$A_4(5)$	$A_4(6)$	$A_4(7)$	$A_4(8)$	$A_4(9)$	
A_5	$\Longleftrightarrow$	$A_5(1)$	$A_5(2)$	$A_5(3)$	$A_5(4)$	$A_5(5)$	$A_5(6)$	$A_5(7)$	$A_5(8)$	$A_5(9)$	
A_6	$\Longleftrightarrow$	$A_6(1)$	$A_6(2)$	$A_6(3)$	$A_6(4)$	$A_6(5)$	$A_6(6)$	$A_6(7)$	$A_6(8)$	$A_6(9)$	
A_7	$\Longleftrightarrow$	$A_7(1)$	$A_7(2)$	$A_7(3)$	$A_7(4)$	$A_7(5)$	$A_7(6)$	$A_7(7)$	$A_7(8)$	$A_7(9)$	
A_8	$\Longleftrightarrow$	$A_8(1)$	$A_8(2)$	$A_8(3)$	$A_8(4)$	$A_8(5)$	$A_8(6)$	$A_8(7)$	$A_8(8)$	$A_8(9)$	
A_9	$\Longleftrightarrow$	$A_9(1)$	$A_9(2)$	$A_9(3)$	$A_9(4)$	$A_9(5)$	$A_9(6)$	$A_9(7)$	$A_9(8)$	$A_9(9)$	
$\vdots$	$\ddots$					$\vdots$					
A_n	$\Longleftrightarrow$	$A_n(1)$	$A_n(2)$	$A_n(3)$	$A_n(4)$	$A_n(5)$	$A_n(6)$	$A_n(7)$	$A_n(8)$	$A_n(9)$	
$\vdots$	$\ddots$					$\vdots$					

解释: $A_1(5)$ 表示的是第 1 个员工在第 5 层所选择的方向 (L 或 R 其中一者).$A_8(8)$ 表示的是第 8 个员工在第 8 层所选择的方向 (L 或 R 其中一者).

对角线论证

我们假设了有一种一一对应的方法，但我们不知道这个方法具体长什么样.不过没关系，我们可以把这种方法用符号的表述方式写下来:

员工/层数		1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\dots$
A_1	$\Longleftrightarrow$	$A_1(1)$	$A_1(2)$	$A_1(3)$	$A_1(4)$	$A_1(5)$	$A_1(6)$	$A_1(7)$	$A_1(8)$	$A_1(9)$	
A_2	$\Longleftrightarrow$	$A_2(1)$	$A_2(2)$	$A_2(3)$	$A_2(4)$	$A_2(5)$	$A_2(6)$	$A_2(7)$	$A_2(8)$	$A_2(9)$	
A_3	$\Longleftrightarrow$	$A_3(1)$	$A_3(2)$	$A_3(3)$	$A_3(4)$	$A_3(5)$	$A_3(6)$	$A_3(7)$	$A_3(8)$	$A_3(9)$	
A_4	$\Longleftrightarrow$	$A_4(1)$	$A_4(2)$	$A_4(3)$	$A_4(4)$	$A_4(5)$	$A_4(6)$	$A_4(7)$	$A_4(8)$	$A_4(9)$	
A_5	$\Longleftrightarrow$	$A_5(1)$	$A_5(2)$	$A_5(3)$	$A_5(4)$	$A_5(5)$	$A_5(6)$	$A_5(7)$	$A_5(8)$	$A_5(9)$	
A_6	$\Longleftrightarrow$	$A_6(1)$	$A_6(2)$	$A_6(3)$	$A_6(4)$	$A_6(5)$	$A_6(6)$	$A_6(7)$	$A_6(8)$	$A_6(9)$	
A_7	$\Longleftrightarrow$	$A_7(1)$	$A_7(2)$	$A_7(3)$	$A_7(4)$	$A_7(5)$	$A_7(6)$	$A_7(7)$	$A_7(8)$	$A_7(9)$	
A_8	$\Longleftrightarrow$	$A_8(1)$	$A_8(2)$	$A_8(3)$	$A_8(4)$	$A_8(5)$	$A_8(6)$	$A_8(7)$	$A_8(8)$	$A_8(9)$	
A_9	$\Longleftrightarrow$	$A_9(1)$	$A_9(2)$	$A_9(3)$	$A_9(4)$	$A_9(5)$	$A_9(6)$	$A_9(7)$	$A_9(8)$	$A_9(9)$	
$\vdots$	$\ddots$					$\vdots$					
A_n	$\Longleftrightarrow$	$A_n(1)$	$A_n(2)$	$A_n(3)$	$A_n(4)$	$A_n(5)$	$A_n(6)$	$A_n(7)$	$A_n(8)$	$A_n(9)$	
$\vdots$	$\ddots$					$\vdots$					

解释: $A_1(5)$ 表示的是第 1 个员工在第 5 层所选择的方向 (L 或 R 其中一者).$A_8(8)$ 表示的是第 8 个员工在第 8 层所选择的方向 (L 或 R 其中一者). $A_n(k)$ 表示的是第 n 个员工在第 k 层所选择的方向 (L 或 R 其中一者).

对角线论证

我们假设了这样一种一一对应的方法存在.

对角线论证

我们假设了这样一种一一对应的方法存在.现在我们将描述一条路径 (我们把它叫做 D), 并且通过这条特殊的管道来推导出矛盾.

对角线论证

我们假设了这样一种一一对应的方法存在.现在我们将描述一条路径 (我们把它叫做 D), 并且通过这条特殊的管道来推导出矛盾.我们将要推导出的矛盾是: 路径 D 不可能被任何一个员工清理到.

对角线论证

因为每一条路径都能被一个 L/R 的序列描述，我们只需要知道这条路径在每一层的走向是 L 还是 R 就可以精确定位它

对角线论证

因为每一条路径都能被一个 L/R 的序列描述, 我们只需要知道这条路径在每一层的走向是 L 还是 R 就可以精确定位它

对角线构造

给定前面这样一种一一对应的方式, 我们定义这样一条路径 (我们叫它路径 D).

对角线论证

因为每一条路径都能被一个 L/R 的序列描述，我们只需要知道这条路径在每一层的走向是 L 还是 R 就可以精确定位它

对角线构造

给定前面这样一种一一对应的方式，我们定义这样一条路径 (我们叫它路径 D).
如果 $A_1(1) = L$, 那么路径 D 在第 1 层的走向就是 R; 如果 $A_1(1) = R$, 路径 D 在第 1 层的走向就是 L.

对角线论证

因为每一条路径都能被一个 L/R 的序列描述，我们只需要知道这条路径在每一层的走向是 L 还是 R 就可以精确定位它

对角线构造

给定前面这样一种一一对应的方式，我们定义这样一条路径 (我们叫它路径 D).

如果 $A_1(1) = L$，那么路径 D 在第 1 层的走向就是 R；如果 $A_1(1) = R$，路径 D 在第 1 层的走向就是 L.

如果 $A_2(2) = L$，那么路径 D 在第 2 层的走向就是 R；如果 $A_2(2) = R$，路径 D 在第 2 层就是 L.

$\vdots$

对角线论证

因为每一条路径都能被一个 L/R 的序列描述，我们只需要知道这条路径在每一层的走向是 L 还是 R 就可以精确定位它

对角线构造

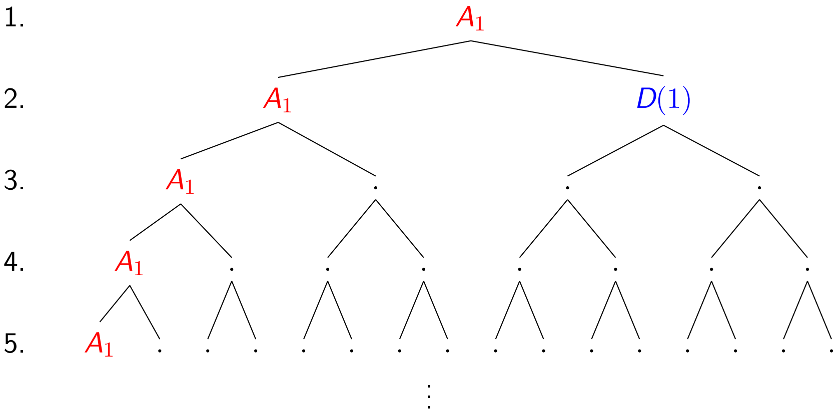
给定前面这样一种一一对应的方式，我们定义这样一条路径 (我们叫它路径 D).
如果 $A_1(1) = L$，那么路径 D 在第 1 层的走向就是 R；如果 $A_1(1) = R$，路径 D 在第 1 层的走向就是 L.
如果 $A_2(2) = L$，那么路径 D 在第 2 层的走向就是 R；如果 $A_2(2) = R$，路径 D 在第 2 层就是 L.

$\vdots$

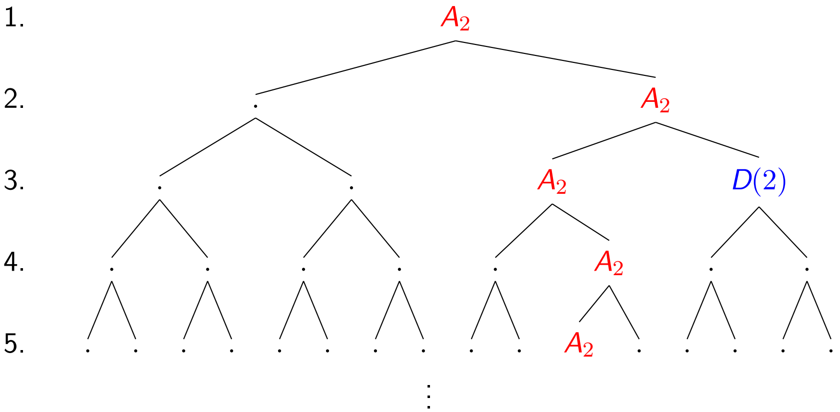
如果 $A_n(n) = L$，那么路径 D 在第 n 层的走向就是 R；如果 $A_n(n) = R$，路径 D 在第 n 层就是 L.

$\vdots$

路径 D



路径 D



对角线构造

员工/层数		1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
A_1	$\Longleftrightarrow$	$A_1(1)$	$A_1(2)$	$A_1(3)$	$A_1(4)$	$A_1(5)$	$A_1(6)$	$A_1(7)$	$A_1(8)$	$A_1(9)$	
A_2	$\Longleftrightarrow$	$A_2(1)$	$A_2(2)$	$A_2(3)$	$A_2(4)$	$A_2(5)$	$A_2(6)$	$A_2(7)$	$A_2(8)$	$A_2(9)$	
A_3	$\Longleftrightarrow$	$A_3(1)$	$A_3(2)$	$A_3(3)$	$A_3(4)$	$A_3(5)$	$A_3(6)$	$A_3(7)$	$A_3(8)$	$A_3(9)$	
A_4	$\Longleftrightarrow$	$A_4(1)$	$A_4(2)$	$A_4(3)$	$A_4(4)$	$A_4(5)$	$A_4(6)$	$A_4(7)$	$A_4(8)$	$A_4(9)$	
A_5	$\Longleftrightarrow$	$A_5(1)$	$A_5(2)$	$A_5(3)$	$A_5(4)$	$A_5(5)$	$A_5(6)$	$A_5(7)$	$A_5(8)$	$A_5(9)$	
A_6	$\Longleftrightarrow$	$A_6(1)$	$A_6(2)$	$A_6(3)$	$A_6(4)$	$A_6(5)$	$A_6(6)$	$A_6(7)$	$A_6(8)$	$A_6(9)$	
A_7	$\Longleftrightarrow$	$A_7(1)$	$A_7(2)$	$A_7(3)$	$A_7(4)$	$A_7(5)$	$A_7(6)$	$A_7(7)$	$A_7(8)$	$A_7(9)$	
A_8	$\Longleftrightarrow$	$A_8(1)$	$A_8(2)$	$A_8(3)$	$A_8(4)$	$A_8(5)$	$A_8(6)$	$A_8(7)$	$A_8(8)$	$A_8(9)$	
A_9	$\Longleftrightarrow$	$A_9(1)$	$A_9(2)$	$A_9(3)$	$A_9(4)$	$A_9(5)$	$A_9(6)$	$A_9(7)$	$A_9(8)$	$A_9(9)$	
$\vdots$	$\ddots$					$\vdots$					

对角线构造

员工/层数		1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\dots$
A_1	$\Longleftrightarrow$	$A_1(1)$	$A_1(2)$	$A_1(3)$	$A_1(4)$	$A_1(5)$	$A_1(6)$	$A_1(7)$	$A_1(8)$	$A_1(9)$	
A_2	$\Longleftrightarrow$	$A_2(1)$	$A_2(2)$	$A_2(3)$	$A_2(4)$	$A_2(5)$	$A_2(6)$	$A_2(7)$	$A_2(8)$	$A_2(9)$	
A_3	$\Longleftrightarrow$	$A_3(1)$	$A_3(2)$	$A_3(3)$	$A_3(4)$	$A_3(5)$	$A_3(6)$	$A_3(7)$	$A_3(8)$	$A_3(9)$	
A_4	$\Longleftrightarrow$	$A_4(1)$	$A_4(2)$	$A_4(3)$	$A_4(4)$	$A_4(5)$	$A_4(6)$	$A_4(7)$	$A_4(8)$	$A_4(9)$	
A_5	$\Longleftrightarrow$	$A_5(1)$	$A_5(2)$	$A_5(3)$	$A_5(4)$	$A_5(5)$	$A_5(6)$	$A_5(7)$	$A_5(8)$	$A_5(9)$	
A_6	$\Longleftrightarrow$	$A_6(1)$	$A_6(2)$	$A_6(3)$	$A_6(4)$	$A_6(5)$	$A_6(6)$	$A_6(7)$	$A_6(8)$	$A_6(9)$	
A_7	$\Longleftrightarrow$	$A_7(1)$	$A_7(2)$	$A_7(3)$	$A_7(4)$	$A_7(5)$	$A_7(6)$	$A_7(7)$	$A_7(8)$	$A_7(9)$	
A_8	$\Longleftrightarrow$	$A_8(1)$	$A_8(2)$	$A_8(3)$	$A_8(4)$	$A_8(5)$	$A_8(6)$	$A_8(7)$	$A_8(8)$	$A_8(9)$	
A_9	$\Longleftrightarrow$	$A_9(1)$	$A_9(2)$	$A_9(3)$	$A_9(4)$	$A_9(5)$	$A_9(6)$	$A_9(7)$	$A_9(8)$	$A_9(9)$	
$\vdots$	$\ddots$					$\vdots$					

主要思想：我们想描述一条不可能被任何一个员工清理到的路径，于是我们就让 D 的走向避开这条对角线

例子

员工/层数		1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
A_1	$\Longleftrightarrow$	L	$A_1(2)$	$A_1(3)$	$A_1(4)$	$A_1(5)$	$A_1(6)$	$A_1(7)$	$A_1(8)$	$A_1(9)$	
A_2	$\Longleftrightarrow$	$A_2(1)$	L	$A_2(3)$	$A_2(4)$	$A_2(5)$	$A_2(6)$	$A_2(7)$	$A_2(8)$	$A_2(9)$	
A_3	$\Longleftrightarrow$	$A_3(1)$	$A_3(2)$	R	$A_3(4)$	$A_3(5)$	$A_3(6)$	$A_3(7)$	$A_3(8)$	$A_3(9)$	
A_4	$\Longleftrightarrow$	$A_4(1)$	$A_4(2)$	$A_4(3)$	R	$A_4(5)$	$A_4(6)$	$A_4(7)$	$A_4(8)$	$A_4(9)$	
A_5	$\Longleftrightarrow$	$A_5(1)$	$A_5(2)$	$A_5(3)$	$A_5(4)$	L	$A_5(6)$	$A_5(7)$	$A_5(8)$	$A_5(9)$	
A_6	$\Longleftrightarrow$	$A_6(1)$	$A_6(2)$	$A_6(3)$	$A_6(4)$	$A_6(5)$	R	$A_6(7)$	$A_6(8)$	$A_6(9)$	
A_7	$\Longleftrightarrow$	$A_7(1)$	$A_7(2)$	$A_7(3)$	$A_7(4)$	$A_7(5)$	$A_7(6)$	R	$A_7(8)$	$A_7(9)$	
A_8	$\Longleftrightarrow$	$A_8(1)$	$A_8(2)$	$A_8(3)$	$A_8(4)$	$A_8(5)$	$A_8(6)$	$A_8(7)$	L	$A_8(9)$	
A_9	$\Longleftrightarrow$	$A_9(1)$	$A_9(2)$	$A_9(3)$	$A_9(4)$	$A_9(5)$	$A_9(6)$	$A_9(7)$	$A_9(8)$	R	
$\vdots$	$\ddots$					$\vdots$					

$$\mathrm{D} = \mathrm{R\ R\ L\ L\ R\ L\ L\ R\ L}$$

证明

D 能不能被第 888 个员工清理到呢？

证明

D 能不能被第 888 个员工清理到呢?

- A_{888} 在第 888 层时会需要选择一个方向走, 这个方向要么是 L, 要么是 R.

证明

D 能不能被第 888 个员工清理到呢?

- A_{888} 在第 888 层时会需要选择一个方向走, 这个方向要么是 L, 要么是 R.
- 假设这个方向是 L, 那么根据 D 的定义, D 在第 888 层的走向就是 R.

证明

D 能不能被第 888 个员工清理到呢?

- A_{888} 在第 888 层时会需要选择一个方向走, 这个方向要么是 L, 要么是 R.
- 假设这个方向是 L, 那么根据 D 的定义, D 在第 888 层的走向就是 R.
- 假设这个方向是 R, 那么根据 D 的定义, D 在第 888 层的走向就是 L.

证明

D 能不能被第 888 个员工清理到呢?

- A_{888} 在第 888 层时会需要选择一个方向走, 这个方向要么是 L, 要么是 R.
- 假设这个方向是 L, 那么根据 D 的定义, D 在第 888 层的走向就是 R.
- 假设这个方向是 R, 那么根据 D 的定义, D 在第 888 层的走向就是 L.
- 所以 D 不可能被 A_{888} 清理到, 因为 D 的走向跟 A_{888} 的走向在第 888 层肯定不同

证明

D 能不能被第 4567 个员工清理到呢?

证明

D 能不能被第 4567 个员工清理到呢?

- A_{4567} 在第 4567 层时会需要选择一个方向走, 这个方向要么是 L, 要么是 R.

证明

D 能不能被第 4567 个员工清理到呢?

- A_{4567} 在第 4567 层时会需要选择一个方向走, 这个方向要么是 L, 要么是 R.
- 假设这个方向是 L, 那么根据 D 的定义, D 在第 4567 层的走向就是 R.

证明

D 能不能被第 4567 个员工清理到呢?

- A_{4567} 在第 4567 层时会需要选择一个方向走, 这个方向要么是 L, 要么是 R.
- 假设这个方向是 L, 那么根据 D 的定义, D 在第 4567 层的走向就是 R.
- 假设这个方向是 R, 那么根据 D 的定义, D 在第 4567 层的走向就是 L.

证明

D 能不能被第 4567 个员工清理到呢?

- A_{4567} 在第 4567 层时会需要选择一个方向走, 这个方向要么是 L, 要么是 R.
- 假设这个方向是 L, 那么根据 D 的定义, D 在第 4567 层的走向就是 R.
- 假设这个方向是 R, 那么根据 D 的定义, D 在第 4567 层的走向就是 L.
- 所以 D 不可能被 A_{4567} 清理到, 因为 D 的走向跟 A_{4567} 的走向在第 4567 层肯定不同

证明

我们现在可以利用 D 推导出一个自相矛盾的结论.

证明

我们现在可以利用 D 推导出一个自相矛盾的结论.

- 假设员工和路径的一一对应存在. 那么路径 D 就肯定也会被某个员工清理到. 我们把这个员工叫做 A_n.

证明

我们现在可以利用 D 推导出一个自相矛盾的结论.

- 假设员工和路径的一一对应存在. 那么路径 D 就肯定也会被某个员工清理到. 我们把这个员工叫做 A_n.
- A_n 在第 n 层时会需要选择一个方向走, 这个方向要么是 L, 要么是 R.

证明

我们现在可以利用 D 推导出一个自相矛盾的结论.

- 假设员工和路径的一一对应存在. 那么路径 D 就肯定也会被某个员工清理到. 我们把这个员工叫做 A_n.
- A_n 在第 n 层时会需要选择一个方向走, 这个方向要么是 L, 要么是 R.
- 假设这个方向是 L, 那么根据 D 的定义, D 在第 n 层的走向就是 R.

证明

我们现在可以利用 D 推导出一个自相矛盾的结论.

- 假设员工和路径的一一对应存在. 那么路径 D 就肯定也会被某个员工清理到. 我们把这个员工叫做 A_n.
- A_n 在第 n 层时会需要选择一个方向走, 这个方向要么是 L, 要么是 R.
- 假设这个方向是 L, 那么根据 D 的定义, D 在第 n 层的走向就是 R.
- 假设这个方向是 R, 那么根据 D 的定义, D 在第 n 层的走向就是 L.

证明

我们现在可以利用 D 推导出一个自相矛盾的结论.

- 假设员工和路径的一一对应存在. 那么路径 D 就肯定也会被某个员工清理到. 我们把这个员工叫做 A_n.
- A_n 在第 n 层时会需要选择一个方向走, 这个方向要么是 L, 要么是 R.
- 假设这个方向是 L, 那么根据 D 的定义, D 在第 n 层的走向就是 R.
- 假设这个方向是 R, 那么根据 D 的定义, D 在第 n 层的走向就是 L.
- 也就是说, 员工 A_n 在第 n 层肯定不会清理到 D

证明

我们现在可以利用 D 推导出一个自相矛盾的结论.

- 假设员工和路径的一一对应存在. 那么路径 D 就肯定也会被某个员工清理到. 我们把这个员工叫做 A_n.
- A_n 在第 n 层时会需要选择一个方向走, 这个方向要么是 L, 要么是 R.
- 假设这个方向是 L, 那么根据 D 的定义, D 在第 n 层的走向就是 R.
- 假设这个方向是 R, 那么根据 D 的定义, D 在第 n 层的走向就是 L.
- 也就是说, 员工 A_n 在第 n 层肯定不会清理到 D
- 这是一个自相矛盾的结论. 所以我们一开始的假设是错误的.

证明

我们现在可以利用 D 推导出一个自相矛盾的结论.

- 假设员工和路径的一一对应存在. 那么路径 D 就肯定也会被某个员工清理到. 我们把这个员工叫做 A_n.
- A_n 在第 n 层时会需要选择一个方向走, 这个方向要么是 L, 要么是 R.
- 假设这个方向是 L, 那么根据 D 的定义, D 在第 n 层的走向就是 R.
- 假设这个方向是 R, 那么根据 D 的定义, D 在第 n 层的走向就是 L.
- 也就是说, 员工 A_n 在第 n 层肯定不会清理到 D
- 这是一个自相矛盾的结论. 所以我们一开始的假设是错误的.
- 也就是说, 这样一个一一对应不存在. 即: 员工人数跟管道数量不一样大.

证明

我们现在可以利用 D 推导出一个自相矛盾的结论.

- 假设员工和路径的一一对应存在. 那么路径 D 就肯定也会被某个员工清理到. 我们把这个员工叫做 A_n.
- A_n 在第 n 层时会需要选择一个方向走, 这个方向要么是 L, 要么是 R.
- 假设这个方向是 L, 那么根据 D 的定义, D 在第 n 层的走向就是 R.
- 假设这个方向是 R, 那么根据 D 的定义, D 在第 n 层的走向就是 L.
- 也就是说, 员工 A_n 在第 n 层肯定不会清理到 D
- 这是一个自相矛盾的结论. 所以我们一开始的假设是错误的.
- 也就是说, 这样一个一一对应不存在. 即: 员工人数跟管道数量不一样大.
- 管道数量比员工人数要多.

康托尔

康托尔惊人且革命性的发现就是上述事实: 有些无限大比别的无限大还要大!

康托尔空间

为了纪念康托尔的发现，现代数学界把下面这种结构称为“康托尔空间”

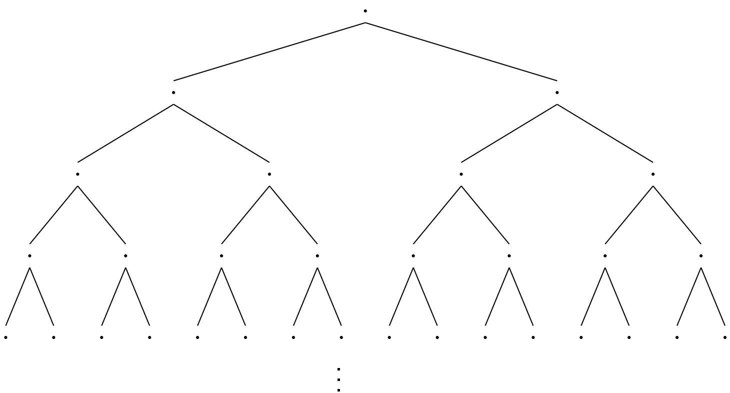
1.

2.

3.

4.

5.



实数

前面有提到过，自然数跟有理数一样多.

实数

前面有提到过，自然数跟有理数一样多. 康托尔的出发点就是如下问题: 自然数跟实数是不是一样多的?

实数

前面有提到过，自然数跟有理数一样多. 康托尔的出发点就是如下问题: 自然数跟实数是不是一样多的?

如果我们把 L 当作 0, R 当作 1, 那么我们可以把每一条路径 (每一个 L/R 序列) 看作一个 0/1 序列. 然后我们在每一个序列前面加上 "0.", 那么每一条路径就是一个大于等于 0 并且小于 1 的, 小数点后数字只有 0 和 1 的实数. 例: RLLLLLLR... $= 0.10000001\ldots$

实数

前面有提到过, 自然数跟有理数一样多. 康托尔的出发点就是如下问题: 自然数跟实数是不是一样多的?

如果我们把 L 当作 0, R 当作 1, 那么我们可以把每一条路径 (每一个 L/R 序列) 看作一个 0/1 序列. 然后我们在每一个序列前面加上 "0.", 那么每一条路径就是一个大于等于 0 并且小于 1 的, 小数点后数字只有 0 和 1 的实数. 例: RLLLLLLR... $= 0.10000001\ldots$

那我们上面关于员工和管道的结论就可以读作: 0 到 1 之间, 小数点后只有 0 和 1 的实数要比自然数还多!

自然数子集

自然数集是 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6...\}$

自然数子集

自然数集是 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6...\}$

其中任意的元素的组合都可以挑出来成为一个新的集合. 我们把这样得到的集合叫做自然数的一个子集

自然数子集

自然数集是 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6...\}$

其中任意的元素的组合都可以挑出来成为一个新的集合. 我们把这样得到的集合叫做自然数的一个子集

例: $\{5\}$ 是自然数的一个子集;

自然数子集

自然数集是 $\{1,2,3,4,5,6...\}$

其中任意的元素的组合都可以挑出来成为一个新的集合. 我们把这样得到的集合叫做自然数的一个子集

例: $\{5\}$ 是自然数的一个子集; $\{1,3,5,7,9,11....\}$ 也是自然数的一个子集.

自然数子集

自然数集是 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6...\}$

其中任意的元素的组合都可以挑出来成为一个新的集合. 我们把这样得到的集合叫做自然数的一个子集

例: $\{5\}$ 是自然数的一个子集; $\{1, 3, 5, 7, 9, 11....\}$ 也是自然数的一个子集.

问题: 自然数的数量跟自然数所有子集的数量是否一样多?

康托尔定理

这个问题也可以被我们上面关于员工和管道的事实解决.

康托尔定理

这个问题也可以被我们上面关于员工和管道的事实解决.为什么?

康托尔定理

这个问题也可以被我们上面关于员工和管道的事实解决.为什么?

我们需要什么信息才能知道一个子集是怎么样的呢?

康托尔定理

这个问题也可以被我们上面关于员工和管道的事实解决.为什么?

我们需要什么信息才能知道一个子集是怎么样的呢? 我们需要知道 1 在不在里面, 2 在不在里面, 3 在不在里面, 4 在不在里面,...,n 在不在里面,...

康托尔定理

这个问题也可以被我们上面关于员工和管道的事实解决.为什么?

我们需要什么信息才能知道一个子集是怎么样的呢? 我们需要知道 1 在不在里面, 2 在不在里面, 3 在不在里面, 4 在不在里面,...,n 在不在里面,... 每一个子集都可以表示成这样子

1	2	3	4	5	6	7	8	...	n	...
是	否	是	是	否	是	否	是	...	是/否	...

康托尔定理

这个问题也可以被我们上面关于员工和管道的事实解决.为什么?

我们需要什么信息才能知道一个子集是怎么样的呢? 我们需要知道 1 在不在里面, 2 在不在里面, 3 在不在里面, 4 在不在里面,...,n 在不在里面,... 每一个子集都可以表示成这样子

1	2	3	4	5	6	7	8	...	n	...
是	否	是	是	否	是	否	是	...	是/否	...

看着熟悉吗?

康托尔定理

1	2	3	4	5	6	7	8	...	n	...
是	否	是	是	否	是	否	是	...	是/否	...

康托尔定理

1	2	3	4	5	6	7	8	...	n	...
是	否	是	是	否	是	否	是	...	是/否	...

1	2	3	4	5	6	7	8	...	n	...
R	L	R	R	L	R	L	R	...	R/L	...

康托尔定理

1	2	3	4	5	6	7	8	...	n	...
是	否	是	是	否	是	否	是	...	是/否	...

1	2	3	4	5	6	7	8	...	n	...
R	L	R	R	L	R	L	R	...	R/L	...

1	2	3	4	5	6	7	8	...	n	...
1	0	1	1	0	1	0	1	...	1/0	...

康托尔定理

1	2	3	4	5	6	7	8	...	n	...
是	否	是	是	否	是	否	是	...	是/否	...

1	2	3	4	5	6	7	8	...	n	...
R	L	R	R	L	R	L	R	...	R/L	...

1	2	3	4	5	6	7	8	...	n	...
1	0	1	1	0	1	0	1	...	1/0	...

每一个自然数的子集都可以表示成一个 L/R 或者 0/1 序列.

康托尔定理

证明 (反证法): 自然数的数量跟自然数所有子集的数量不一样大.

- 假设自然数和自然数的子集可以一一对应 (从这个假设出发, 我们将推导出一个自相矛盾的结论)

对角线论证

$$
\begin{array}{llllllllllll}
 & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \ldots \\
A_1 & \Longleftrightarrow & A_1(1) & A_1(2) & A_1(3) & A_1(4) & A_1(5) & A_1(6) & A_1(7) & A_1(8) & A_1(9) & \\
A_2 & \Longleftrightarrow & A_2(1) & A_2(2) & A_2(3) & A_2(4) & A_2(5) & A_2(6) & A_2(7) & A_2(8) & A_2(9) & \\
A_3 & \Longleftrightarrow & A_3(1) & A_3(2) & A_3(3) & A_3(4) & A_3(5) & A_3(6) & A_3(7) & A_3(8) & A_3(9) & \\
A_4 & \Longleftrightarrow & A_4(1) & A_4(2) & A_4(3) & A_4(4) & A_4(5) & A_4(6) & A_4(7) & A_4(8) & A_4(9) & \\
A_5 & \Longleftrightarrow & A_5(1) & A_5(2) & A_5(3) & A_5(4) & A_5(5) & A_5(6) & A_5(7) & A_5(8) & A_5(9) & \\
A_6 & \Longleftrightarrow & A_6(1) & A_6(2) & A_6(3) & A_6(4) & A_6(5) & A_6(6) & A_6(7) & A_6(8) & A_6(9) & \\
A_7 & \Longleftrightarrow & A_7(1) & A_7(2) & A_7(3) & A_7(4) & A_7(5) & A_7(6) & A_7(7) & A_7(8) & A_7(9) & \\
A_8 & \Longleftrightarrow & A_8(1) & A_8(2) & A_8(3) & A_8(4) & A_8(5) & A_8(6) & A_8(7) & A_8(8) & A_8(9) & \\
A_9 & \Longleftrightarrow & A_9(1) & A_9(2) & A_9(3) & A_9(4) & A_9(5) & A_9(6) & A_9(7) & A_9(8) & A_9(9) & \\
\vdots & \ddots & & & & & \vdots & & & & & \\
A_n & \Longleftrightarrow & A_n(1) & A_n(2) & A_n(3) & A_n(4) & A_n(5) & A_n(6) & A_n(7) & A_n(8) & A_n(9) & \\
\vdots & \ddots & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

对角线论证

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
 & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \dots \\
A_1 & \iff & A_1(1) & A_1(2) & A_1(3) & A_1(4) & A_1(5) & A_1(6) & A_1(7) & A_1(8) & A_1(9) & \\
A_2 & \iff & A_2(1) & A_2(2) & A_2(3) & A_2(4) & A_2(5) & A_2(6) & A_2(7) & A_2(8) & A_2(9) & \\
A_3 & \iff & A_3(1) & A_3(2) & A_3(3) & A_3(4) & A_3(5) & A_3(6) & A_3(7) & A_3(8) & A_3(9) & \\
A_4 & \iff & A_4(1) & A_4(2) & A_4(3) & A_4(4) & A_4(5) & A_4(6) & A_4(7) & A_4(8) & A_4(9) & \\
A_5 & \iff & A_5(1) & A_5(2) & A_5(3) & A_5(4) & A_5(5) & A_5(6) & A_5(7) & A_5(8) & A_5(9) & \\
A_6 & \iff & A_6(1) & A_6(2) & A_6(3) & A_6(4) & A_6(5) & A_6(6) & A_6(7) & A_6(8) & A_6(9) & \\
A_7 & \iff & A_7(1) & A_7(2) & A_7(3) & A_7(4) & A_7(5) & A_7(6) & A_7(7) & A_7(8) & A_7(9) & \\
A_8 & \iff & A_8(1) & A_8(2) & A_8(3) & A_8(4) & A_8(5) & A_8(6) & A_8(7) & A_8(8) & A_8(9) & \\
A_9 & \iff & A_9(1) & A_9(2) & A_9(3) & A_9(4) & A_9(5) & A_9(6) & A_9(7) & A_9(8) & A_9(9) & \\
\vdots & \ddots & & & & & \vdots & & & & & \\
A_n & \iff & A_n(1) & A_n(2) & A_n(3) & A_n(4) & A_n(5) & A_n(6) & A_n(7) & A_n(8) & A_n(9) & \\
\vdots & \ddots & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

$A_n(k)$ 表示的是第 n 个子集对 “k 在不在 A_n 里面?” 的回答 (0 或 1 其中一者).

康托尔定理

证明 (反证法): 自然数的数量跟自然数所有子集的数量不一样大.

- 假设自然数和自然数的子集可以一一对应 (从这个假设出发, 我们将推导出一个自相矛盾的结论)

康托尔定理

证明 (反证法): 自然数的数量跟自然数所有子集的数量不一样大.

- 假设自然数和自然数的子集可以一一对应 (从这个假设出发, 我们将推导出一个自相矛盾的结论)
- 给定这样一种一一对应的方式, 我们可以定义这样一个子集 (我们把它叫做 D)

康托尔定理

证明 (反证法): 自然数的数量跟自然数所有子集的数量不一样大.

- 假设自然数和自然数的子集可以一一对应 (从这个假设出发, 我们将推导出一个自相矛盾的结论)
- 给定这样一种一一对应的方式, 我们可以定义这样一个子集 (我们把它叫做 D)
- 如果 $A_1(1) = 0$, 那么 $D(1) = 1$; 如果 $A_1(1) = 1$, 那么 $D(1) = 0$

康托尔定理

证明 (反证法): 自然数的数量跟自然数所有子集的数量不一样大.

- 假设自然数和自然数的子集可以一一对应 (从这个假设出发, 我们将推导出一个自相矛盾的结论)
- 给定这样一种一一对应的方式, 我们可以定义这样一个子集 (我们把它叫做 D)
- 如果 $A_1(1) = 0$, 那么 $D(1) = 1$; 如果 $A_1(1) = 1$, 那么 $D(1) = 0$
- 如果 $A_2(2) = 0$, 那么 $D(2) = 1$; 如果 $A_2(2) = 1$, 那么 $D(2) = 0$

康托尔定理

证明 (反证法): 自然数的数量跟自然数所有子集的数量不一样大.

- 假设自然数和自然数的子集可以一一对应 (从这个假设出发, 我们将推导出一个自相矛盾的结论)
- 给定这样一种一一对应的方式, 我们可以定义这样一个子集 (我们把它叫做 D)
- 如果 $A_1(1) = 0$, 那么 $D(1) = 1$; 如果 $A_1(1) = 1$, 那么 $D(1) = 0$
- 如果 $A_2(2) = 0$, 那么 $D(2) = 1$; 如果 $A_2(2) = 1$, 那么 $D(2) = 0$
- $\vdots$

康托尔定理

证明 (反证法): 自然数的数量跟自然数所有子集的数量不一样大.

- 假设自然数和自然数的子集可以一一对应 (从这个假设出发, 我们将推导出一个自相矛盾的结论)
- 给定这样一种一一对应的方式, 我们可以定义这样一个子集 (我们把它叫做 D)
- 如果 $A_1(1) = 0$, 那么 $D(1) = 1$; 如果 $A_1(1) = 1$, 那么 $D(1) = 0$
- 如果 $A_2(2) = 0$, 那么 $D(2) = 1$; 如果 $A_2(2) = 1$, 那么 $D(2) = 0$
- $\vdots$
- 如果 $A_n(n) = 0$, 那么 $D(n) = 1$; 如果 $A_n(n) = 1$, 那么 $D(n) = 0$

康托尔定理

证明 (反证法): 自然数的数量跟自然数所有子集的数量不一样大.

- 假设自然数和自然数的子集可以一一对应 (从这个假设出发, 我们将推导出一个自相矛盾的结论)
- 给定这样一种一一对应的方式, 我们可以定义这样一个子集 (我们把它叫做 D)
- 如果 $A_1(1) = 0$, 那么 $D(1) = 1$; 如果 $A_1(1) = 1$, 那么 $D(1) = 0$
- 如果 $A_2(2) = 0$, 那么 $D(2) = 1$; 如果 $A_2(2) = 1$, 那么 $D(2) = 0$
- $\vdots$
- 如果 $A_n(n) = 0$, 那么 $D(n) = 1$; 如果 $A_n(n) = 1$, 那么 $D(n) = 0$
- $\vdots$

对角线图示

$$
\begin{array}{lcl}
s_1 & = & 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \ldots \\
s_2 & = & 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \ldots \\
s_3 & = & 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ \ldots \\
s_4 & = & 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ \ldots \\
s_5 & = & 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ \ldots \\
s_6 & = & 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ \ldots \\
s_7 & = & 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ \ldots \\
s_8 & = & 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ \ldots \\
s_9 & = & 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ \ldots \\
s_{10} & = & 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ \ldots \\
s_{11} & = & 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ \ldots \\
\vdots & & \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \ddots
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
s & = & 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ \ldots
\end{array}
$$

图片来源：维基百科. s_1 是我们的 A_1，如此类推. s 是我们的 D

康托尔定理

- 假设上述的一一对应存在, 那么子集 D 也肯定能对应到某一个自然数. 我们把这个自然数叫做 n. (也就是说, D 是上述列表中的某个 A_n)

康托尔定理

- 假设上述的一一对应存在, 那么子集 D 也肯定能对应到某一个自然数. 我们把这个自然数叫做 n. (也就是说, D 是上述列表中的某个 A_n)
- 记得 D 的定义: 如果 $A_n(n) = 0$, 那么 $D(n) = 1$; 如果 $A_n(n) = 1$, 那么 $D(n) = 0$

康托尔定理

- 假设上述的一一对应存在, 那么子集 D 也肯定能对应到某一个自然数. 我们把这个自然数叫做 n. (也就是说, D 是上述列表中的某个 A_n)
- 记得 D 的定义: 如果 $A_n(n) = 0$, 那么 $D(n) = 1$; 如果 $A_n(n) = 1$, 那么 $D(n) = 0$
- 即: 如果 n 不在 A_n 里面, n 就在 D 里面; 如果 n 在 A_n 里面, 那么 n 就不在 A_n 里面

康托尔定理

- 假设上述的一一对应存在，那么子集 D 也肯定能对应到某一个自然数．我们把这个自然数叫做 n．(也就是说，D 是上述列表中的某个 A_n)
- 记得 D 的定义：如果 $A_n(n) = 0$，那么 $D(n) = 1$；如果 $A_n(n) = 1$，那么 $D(n) = 0$
- 即：如果 n 不在 A_n 里面，n 就在 D 里面；如果 n 在 A_n 里面，那么 n 就不在 A_n 里面
- 我们这时候可以问："n 在不在 D 里面?"

康托尔定理

- 假设上述的一一对应存在, 那么子集 D 也肯定能对应到某一个自然数. 我们把这个自然数叫做 n. (也就是说, D 是上述列表中的某个 A_n)
- 记得 D 的定义: 如果 $A_n(n) = 0$, 那么 $D(n) = 1$; 如果 $A_n(n) = 1$, 那么 $D(n) = 0$
- 即: 如果 n 不在 A_n 里面, n 就在 D 里面; 如果 n 在 A_n 里面, 那么 n 就不在 A_n 里面
- 我们这时候可以问: "n 在不在 D 里面?"
- 如果 n 在 D 里面, 那么因为 D 就是 A_n, 所以 $A_n(n) = 1$, 所以根据 D 的定义, $D(n) = 0$, 则 n 不在 D 里面

康托尔定理

- 假设上述的一一对应存在，那么子集 D 也肯定能对应到某一个自然数．我们把这个自然数叫做 n．(也就是说，D 是上述列表中的某个 A_n)
- 记得 D 的定义：如果 $A_n(n) = 0$，那么 $D(n) = 1$；如果 $A_n(n) = 1$，那么 $D(n) = 0$
- 即：如果 n 不在 A_n 里面，n 就在 D 里面；如果 n 在 A_n 里面，那么 n 就不在 A_n 里面
- 我们这时候可以问："n 在不在 D 里面?"
- 如果 n 在 D 里面，那么因为 D 就是 A_n，所以 $A_n(n) = 1$，所以根据 D 的定义，$D(n) = 0$，则 n 不在 D 里面
- 如果 n 不在 D 里面，那么因为 D 就是 A_n，所以 $A_n(n) = 0$，所以根据 D 的定义，$D(n) = 1$，则 n 在 D 里面

康托尔定理

- 假设上述的一一对应存在，那么子集 D 也肯定能对应到某一个自然数．我们把这个自然数叫做 n．(也就是说，D 是上述列表中的某个 A_n)
- 记得 D 的定义：如果 $A_n(n) = 0$，那么 $D(n) = 1$；如果 $A_n(n) = 1$，那么 $D(n) = 0$
- 即：如果 n 不在 A_n 里面，n 就在 D 里面；如果 n 在 A_n 里面，那么 n 就不在 A_n 里面
- 我们这时候可以问："n 在不在 D 里面?"
- 如果 n 在 D 里面，那么因为 D 就是 A_n，所以 $A_n(n) = 1$，所以根据 D 的定义，$D(n) = 0$，则 n 不在 D 里面
- 如果 n 不在 D 里面，那么因为 D 就是 A_n，所以 $A_n(n) = 0$，所以根据 D 的定义，$D(n) = 1$，则 n 在 D 里面
- 这是一个自相矛盾的结论．所以我们一开始的假设是错误的．

康托尔定理

- 假设上述的一一对应存在, 那么子集 D 也肯定能对应到某一个自然数. 我们把这个自然数叫做 n. (也就是说, D 是上述列表中的某个 A_n)
- 记得 D 的定义: 如果 $A_n(n) = 0$, 那么 $D(n) = 1$; 如果 $A_n(n) = 1$, 那么 $D(n) = 0$
- 即: 如果 n 不在 A_n 里面, n 就在 D 里面; 如果 n 在 A_n 里面, 那么 n 就不在 A_n 里面
- 我们这时候可以问: “n 在不在 D 里面?”
- 如果 n 在 D 里面, 那么因为 D 就是 A_n, 所以 $A_n(n) = 1$, 所以根据 D 的定义, $D(n) = 0$, 则 n 不在 D 里面
- 如果 n 不在 D 里面, 那么因为 D 就是 A_n, 所以 $A_n(n) = 0$, 所以根据 D 的定义, $D(n) = 1$, 则 n 在 D 里面
- 这是一个自相矛盾的结论. 所以我们一开始的假设是错误的.
- 也就是说, 这样一个一一对应不存在. 即: 自然数所有子集的数量要比自然数的数量要多.

精简表述方式

我们留意到, 对角线论证好像都有一个类似的结构. 我们看一下这个结构是怎么样的.

精简表述方式

我们留意到, 对角线论证好像都有一个类似的结构. 我们看一下这个结构是怎么样的.

- 我们有一系列的对象: $A_1, A_2, A_3, \dots$

精简表述方式

我们留意到, 对角线论证好像都有一个类似的结构. 我们看一下这个结构是怎么样的.

- 我们有一系列的对象: $A_1, A_2, A_3, \ldots$
- 我们可以问这些对象一些问题. 例如 $A_1(5) = 0$ or 1? 其中 $0, 1$ 可以表示各种各样的东西 (管道走向; 某个自然数在不在里面...)

精简表述方式

我们留意到，对角线论证好像都有一个类似的结构. 我们看一下这个结构是怎么样的.

- 我们有一系列的对象: $A_1, A_2, A_3, \ldots$
- 我们可以问这些对象一些问题. 例如 $A_1(5) = 0$ or 1? 其中 $0, 1$ 可以表示各种各样的东西 (管道走向; 某个自然数在不在里面...)
- 我们根据 $A_1(1), A_2(2), A_3(3), A_4(4), \ldots$ 的回答来构造的一个新的对象，叫做 D.

精简表述方式

我们留意到，对角线论证好像都有一个类似的结构. 我们看一下这个结构是怎么样的.

- 我们有一系列的对象: $A_1, A_2, A_3, \ldots$
- 我们可以问这些对象一些问题. 例如 $A_1(5) = 0$ or 1? 其中 $0, 1$ 可以表示各种各样的东西 (管道走向; 某个自然数在不在里面...)
- 我们根据 $A_1(1), A_2(2), A_3(3), A_4(4), \ldots$ 的回答来构造的一个新的对象，叫做 D.
- D 的构造让它有一个特殊的性质: 不管 n 具体是多少，$D(n)$ 的回答都跟 $A_n(n)$ 的回答不一样

精简表述方式

我们留意到，对角线论证好像都有一个类似的结构．我们看一下这个结构是怎么样的．

- 我们有一系列的对象：$A_1, A_2, A_3, \ldots$
- 我们可以问这些对象一些问题．例如 $A_1(5) = 0$ or 1? 其中 $0, 1$ 可以表示各种各样的东西 (管道走向; 某个自然数在不在里面...)
- 我们根据 $A_1(1), A_2(2), A_3(3), A_4(4), \ldots$ 的回答来构造的一个新的对象，叫做 D.
- D 的构造让它有一个特殊的性质：不管 n 具体是多少，$D(n)$ 的回答都跟 $A_n(n)$ 的回答不一样
- $D(n) = 1$ 当且仅当 $A_n(n) = 0$; $D(n) = 0$ 当且仅当 $A_n(n) = 1$

精简表述方式

我们留意到, 对角线论证好像都有一个类似的结构. 我们看一下这个结构是怎么样的.

- 我们有一系列的对象: $A_1, A_2, A_3, \dots$
- 我们可以问这些对象一些问题. 例如 $A_1(5) = 0$ or 1? 其中 $0, 1$ 可以表示各种各样的东西 (管道走向; 某个自然数在不在里面...)
- 我们根据 $A_1(1), A_2(2), A_3(3), A_4(4), \dots$ 的回答来构造的一个新的对象, 叫做 D.
- D 的构造让它有一个特殊的性质: 不管 n 具体是多少, $D(n)$ 的回答都跟 $A_n(n)$ 的回答不一样
- $D(n) = 1$ 当且仅当 $A_n(n) = 0$; $D(n) = 0$ 当且仅当 $A_n(n) = 1$
- 为了使用反证法, 我们假设 D 是某一个 A_n.

精简表述方式

我们留意到, 对角线论证好像都有一个类似的结构. 我们看一下这个结构是怎么样的.

- 我们有一系列的对象: $A_1, A_2, A_3, \dots$
- 我们可以问这些对象一些问题. 例如 $A_1(5) = 0$ or 1? 其中 $0, 1$ 可以表示各种各样的东西 (管道走向; 某个自然数在不在里面...)
- 我们根据 $A_1(1), A_2(2), A_3(3), A_4(4), \dots$ 的回答来构造的一个新的对象, 叫做 D.
- D 的构造让它有一个特殊的性质: 不管 n 具体是多少, $D(n)$ 的回答都跟 $A_n(n)$ 的回答不一样
- $D(n) = 1$ 当且仅当 $A_n(n) = 0$; $D(n) = 0$ 当且仅当 $A_n(n) = 1$
- 为了使用反证法, 我们假设 D 是某一个 A_n.
- 然后我们问 $D(n) = ?$

精简表述方式

我们留意到，对角线论证好像都有一个类似的结构. 我们看一下这个结构是怎么样的.

- 我们有一系列的对象: $A_1, A_2, A_3, \ldots$
- 我们可以问这些对象一些问题. 例如 $A_1(5) = 0$ or 1? 其中 $0, 1$ 可以表示各种各样的东西 (管道走向; 某个自然数在不在里面...)
- 我们根据 $A_1(1), A_2(2), A_3(3), A_4(4), \ldots$ 的回答来构造的一个新的对象，叫做 D.
- D 的构造让它有一个特殊的性质: 不管 n 具体是多少，$D(n)$ 的回答都跟 $A_n(n)$ 的回答不一样
- $D(n) = 1$ 当且仅当 $A_n(n) = 0$; $D(n) = 0$ 当且仅当 $A_n(n) = 1$
- 为了使用反证法，我们假设 D 是某一个 A_n.
- 然后我们问 $D(n) =?$
- $D(n) \neq A_n(n)$，但是 $D = A_n$. 所以 $D(n) \neq D(n)$. 这是一个自相矛盾的结论.

理发师悖论

实际上, 我们可能很多人都接触过对角线论证.

理发师悖论

村子里有一个理发师, 这个理发师的接客政策是: “我只帮那些不为自己理发的人理发”.

理发师悖论

实际上，我们可能很多人都接触过对角线论证.

理发师悖论

村子里有一个理发师，这个理发师的接客政策是："我只帮那些不为自己理发的人理发".

如果小明帮小明理发，那么理发师就不会帮小明理发

如果小红不帮小红理发，那么理发师就会帮小红理发

理发师悖论

实际上，我们可能很多人都接触过对角线论证.

理发师悖论

村子里有一个理发师，这个理发师的接客政策是："我只帮那些不为自己理发的人理发".
如果小明帮小明理发，那么理发师就不会帮小明理发
如果小红不帮小红理发，那么理发师就会帮小红理发

问：这位理发师帮不帮理发师自己理发?

- 如果理发师帮自己理发，那么理发师就不会帮自己理发

理发师悖论

实际上，我们可能很多人都接触过对角线论证.

理发师悖论

村子里有一个理发师，这个理发师的接客政策是：“我只帮那些不为自己理发的人理发”.
如果小明帮小明理发，那么理发师就不会帮小明理发
如果小红不帮小红理发，那么理发师就会帮小红理发

问：这位理发师帮不帮理发师自己理发？

- 如果理发师帮自己理发，那么理发师就不会帮自己理发
- 如果理发师不帮自己理发，那么理发师就会帮自己理发

理发师悖论

实际上，我们可能很多人都接触过对角线论证.

理发师悖论

村子里有一个理发师，这个理发师的接客政策是："我只帮那些不为自己理发的人理发".

如果小明帮小明理发，那么理发师就不会帮小明理发
如果小红不帮小红理发，那么理发师就会帮小红理发

问：这位理发师帮不帮理发师自己理发？

- 如果理发师帮自己理发，那么理发师就不会帮自己理发
- 如果理发师不帮自己理发，那么理发师就会帮自己理发

理发师悖论

实际上，我们可能很多人都接触过对角线论证.

理发师悖论

村子里有一个理发师，这个理发师的接客政策是: “我只帮那些不为自己理发的人理发”.
如果小明帮小明理发，那么理发师就不会帮小明理发
如果小红不帮小红理发，那么理发师就会帮小红理发

问: 这位理发师帮不帮理发师自己理发?

- 如果理发师帮自己理发，那么理发师就不会帮自己理发
- 如果理发师不帮自己理发，那么理发师就会帮自己理发

是不是看着有点熟悉?

对角线构造的关键一步是下面这句话:
$D(n) = 1$ 当且仅当 $A_n(n) = 0$; $D(n) = 0$ 当且仅当 $A_n(n) = 1$

抽象

对角线构造的关键一步是下面这句话:
$D(n) = 1$ 当且仅当 $A_n(n) = 0$; $D(n) = 0$ 当且仅当 $A_n(n) = 1$

我们可以把 $D(n) = 1$ 读作 “理发师帮 n 理发”; 把 $A_n(n) = 0$ 读作 “n 不帮 n 理发”.

抽象

对角线构造的关键一步是下面这句话:
$D(n) = 1$ **当且仅当** $A_n(n) = 0$; $D(n) = 0$ **当且仅当** $A_n(n) = 1$

我们可以把 $D(n) = 1$ 读作 “理发师帮 n 理发”; 把 $A_n(n) = 0$ 读作 “n 不帮 n 理发”.

那么在理发师悖论中, 我们就相当于通过对角线构造定义了这样一个 D.

抽象

对角线构造的关键一步是下面这句话:
$D(n) = 1$ 当且仅当 $A_n(n) = 0$; $D(n) = 0$ 当且仅当 $A_n(n) = 1$

我们可以把 $D(n) = 1$ 读作 “理发师帮 n 理发”; 把 $A_n(n) = 0$ 读作 “n 不帮 n 理发”.

那么在理发师悖论中, 我们就相当于通过对角线构造定义了这样一个 D.

理发师帮 n 理发, 当且仅当 n 不帮 n 理发

抽象

对角线构造的关键一步是下面这句话:
$D(n) = 1$ 当且仅当 $A_n(n) = 0$; $D(n) = 0$ 当且仅当 $A_n(n) = 1$

我们可以把 $D(n) = 1$ 读作 “理发师帮 n 理发”; 把 $A_n(n) = 0$ 读作 “n 不帮 n 理发”.

那么在理发师悖论中, 我们就相当于通过对角线构造定义了这样一个 D.

理发师帮 n 理发, 当且仅当 n 不帮 n 理发

这种对角线论证的抽象化在 20 世纪初带来了许多颠覆性的结果。我们接下来将看到对角线论证是如何让我们认识到语言, 证明, 以及计算机的极限的.

一点历史

- 思想家一般会说类似这样的话: “我们追求真理”

一点历史

- 思想家一般会说类似这样的话: “我们追求真理”
- “真理” 是什么? “真” 是什么意思?

一点历史

- 思想家一般会说类似这样的话: "我们追求真理"
- "真理" 是什么? "真" 是什么意思?
- 塔斯基 (Alfred Tarski, 1901-1983) 认为, 如果我们要定义 "真" 这个词的意思, 那么这个定义至少要符合下面这个标准

一点历史

- 思想家一般会说类似这样的话: “我们追求真理”
- “真理” 是什么? “真” 是什么意思?
- 塔斯基 (Alfred Tarski, 1901-1983) 认为, 如果我们要定义 “真” 这个词的意思, 那么这个定义至少要符合下面这个标准
- 一句话是真的, 当且仅当这句话描述的内容符合事实

一点历史

- 思想家一般会说类似这样的话：“我们追求真理”
- “真理”是什么？“真”是什么意思？
- 塔斯基 (Alfred Tarski, 1901-1983) 认为，如果我们要定义“真”这个词的意思，那么这个定义至少要符合下面这个标准
- 一句话是真的，当且仅当这句话描述的内容符合事实
- True(“P”) 当且仅当 P 符合事实

一点历史

- 思想家一般会说类似这样的话: “我们追求真理”
- “真理” 是什么? “真” 是什么意思?
- 塔斯基 (Alfred Tarski, 1901-1983) 认为, 如果我们要定义 “真” 这个词的意思, 那么这个定义至少要符合下面这个标准
- 一句话是真的, 当且仅当这句话描述的内容符合事实
- True(“P”) 当且仅当 P 符合事实
- True(“P”) 当且仅当 P

塔斯基

- 塔斯基考虑了那些可以描述自然数子集的语句

塔斯基

- 塔斯基考虑了那些可以描述自然数子集的语句
- 例 “x 是偶数”, “x 是 1”, “x 大于 100”...

塔斯基

- 塔斯基考虑了那些可以描述自然数子集的语句
- 例 “x 是偶数”, “x 是 1”, “x 大于 100”...
- 我们可以根据语句中的字词在字典中的顺序把这些语句排序为 “$A_1, A_2, A_3, \ldots$”.

塔斯基

- 塔斯基考虑了那些可以描述自然数子集的语句
- 例 “x 是偶数”, “x 是 1”, “x 大于 100”...
- 我们可以根据语句中的字词在字典中的顺序把这些语句排序为 “$A_1, A_2, A_3, \ldots$”.
- 例: $A_1(5) = 1$ 的意思就是 “A_1 这句话里面的 x 换成 5 之后是一个真的语句”

塔斯基不可定义定理

前面说过，如果我们要给“真”下一个定义，那么这个定义至少需要满足:

塔斯基不可定义定理

前面说过，如果我们要给“真”下一个定义，那么这个定义至少需要满足：
True(“P”) 当且仅当 P

塔斯基不可定义定理

前面说过，如果我们要给 “真” 下一个定义，那么这个定义至少需要满足：True(“P”) 当且仅当 P

$A_1(5) = 1$ 的意思就是 “A_1 这句话里面的 x 换成 5 之后是一个真的语句”，也就是 True(“$A_1(5)$”).

塔斯基不可定义定理

- 我们假设这样的对“真”的定义存在 (我们将从这个假设出发，推导出一个自相矛盾的结论)

塔斯基不可定义定理

- 我们假设这样的对 “真” 的定义存在 (我们将从这个假设出发, 推导出一个自相矛盾的结论)
- 我们将定义一个语句, 叫做句子 D.

塔斯基不可定义定理

- 我们假设这样的对 “真” 的定义存在 (我们将从这个假设出发, 推导出一个自相矛盾的结论)
- 我们将定义一个语句, 叫做句子 D.
- 句子 D 的定义: $D(n) = 1$ **当且仅当** $A_n(n) = 0$; $D(n) = 0$ **当且仅当** $A_n(n) = 1$

塔斯基不可定义定理

- 我们假设这样的对“真”的定义存在 (我们将从这个假设出发, 推导出一个自相矛盾的结论)
- 我们将定义一个语句, 叫做句子 D.
- 句子 D 的定义: $D(n) = 1$ **当且仅当** $A_n(n) = 0$; $D(n) = 0$ **当且仅当** $A_n(n) = 1$
- 句子 D 是一个什么样的句子呢?

塔斯基不可定义定理

- 句子 D 的定义: $D(n) = 1$ **当且仅当** $A_n(n) = 0$; $D(n) = 0$ **当且仅当** $A_n(n) = 1$

塔斯基不可定义定理

- 句子 D 的定义: $D(n) = 1$ **当且仅当** $A_n(n) = 0$; $D(n) = 0$ **当且仅当** $A_n(n) = 1$
- 前面我们约定过, $D(n) = 1$ 的意思是 “句子 D 中的 x 换成 n 之后是真的句子”, 也就是 True(“$D(n)$”).

塔斯基不可定义定理

- 句子 D 的定义: $D(n) = 1$ 当且仅当 $A_n(n) = 0$; $D(n) = 0$ 当且仅当 $A_n(n) = 1$
- 前面我们约定过, $D(n) = 1$ 的意思是 “句子 D 中的 x 换成 n 之后是真的句子”, 也就是 True(“$D(n)$”).
- 结合前两点, 句子 D 的定义可以理解成: True($D(n)$) 当且仅当 not-True($A_n(n)$); not-True($D(n)$) 当且仅当 True($A_n(n)$)

塔斯基不可定义定理

- 句子 D 的定义 True(D(n)) 当且仅当 not-True(A_n(n));
  not-True(D(n)) 当且仅当 True(A_n(n))

塔斯基不可定义定理

- 句子 D 的定义 True($D(n)$) 当且仅当 not-True($A_n(n)$); not-True($D(n)$) 当且仅当 True($A_n(n)$)
- 句子 D 也是一个句子, 那么句子 D 也会出现在 $(A_1, A_2, A_3, \ldots)$ 这一个列表里的某一位. 我们用 A_n 来表示 D 在这个列表里面的位置.

塔斯基不可定义定理

- 句子 D 的定义 True($D(n)$) 当且仅当 not-True($A_n(n)$); not-True($D(n)$) 当且仅当 True($A_n(n)$)
- 句子 D 也是一个句子, 那么句子 D 也会出现在 $(A_1, A_2, A_3, \ldots)$ 这一个列表里的某一位. 我们用 A_n 来表示 D 在这个列表里面的位置.
- 我们此时可以问: $D(n)$ 是个真句子吗?

塔斯基不可定义定理

- 句子 D 的定义 True($D(n)$) 当且仅当 not-True($A_n(n)$); not-True($D(n)$) 当且仅当 True($A_n(n)$)
- 句子 D 也是一个句子, 那么句子 D 也会出现在 $(A_1, A_2, A_3, \ldots)$ 这一个列表里的某一位. 我们用 A_n 来表示 D 在这个列表里面的位置.
- 我们此时可以问: $D(n)$ 是个真句子吗?
- 如果 True("$D(n)$"), 那么 not-True("$A_n(n)$"),

塔斯基不可定义定理

- 句子 D 的定义 True($D(n)$) 当且仅当 not-True($A_n(n)$); not-True($D(n)$) 当且仅当 True($A_n(n)$)
- 句子 D 也是一个句子, 那么句子 D 也会出现在 $(A_1, A_2, A_3, \ldots)$ 这一个列表里的某一位. 我们用 A_n 来表示 D 在这个列表里面的位置.
- 我们此时可以问: $D(n)$ 是个真句子吗?
- 如果 True("$D(n)$"), 那么 not-True("$A_n(n)$"),
- 如果 not-True("$D(n)$"), 那么 True("$A_n(n)$").

塔斯基不可定义定理

- 句子 D 的定义 True($D(n)$) 当且仅当 not-True($A_n(n)$); not-True($D(n)$) 当且仅当 True($A_n(n)$)
- 句子 D 也是一个句子, 那么句子 D 也会出现在 $(A_1, A_2, A_3, ...)$ 这一个列表里的某一位. 我们用 A_n 来表示 D 在这个列表里面的位置.
- 我们此时可以问: $D(n)$ 是个真句子吗?
- 如果 True("$D(n)$"), 那么 not-True("$A_n(n)$"),
- 如果 not-True("$D(n)$"), 那么 True("$A_n(n)$").
- 但是根据我们的假设, D 就是 A_n!

塔斯基不可定义定理

- 句子 D 的定义 True($D(n)$) 当且仅当 not-True($A_n(n)$); not-True($D(n)$) 当且仅当 True($A_n(n)$)
- 句子 D 也是一个句子, 那么句子 D 也会出现在 $(A_1, A_2, A_3, \ldots)$ 这一个列表里的某一位. 我们用 A_n 来表示 D 在这个列表里面的位置.
- 我们此时可以问: $D(n)$ 是个真句子吗?
- 如果 True("$D(n)$"), 那么 not-True("$A_n(n)$"),
- 如果 not-True("$D(n)$"), 那么 True("$A_n(n)$").
- 但是根据我们的假设, D 就是 A_n!
- 这是个自相矛盾的结论, 所以我们一开始的假设是错误的.

塔斯基不可定义定理

- 句子 D 的定义 True($D(n)$) 当且仅当 not-True($A_n(n)$); not-True($D(n)$) 当且仅当 True($A_n(n)$)
- 句子 D 也是一个句子, 那么句子 D 也会出现在 $(A_1, A_2, A_3, \ldots)$ 这一个列表里的某一位. 我们用 A_n 来表示 D 在这个列表里面的位置.
- 我们此时可以问: $D(n)$ 是个真句子吗?
- 如果 True("$D(n)$"), 那么 not-True("$A_n(n)$"),
- 如果 not-True("$D(n)$"), 那么 True("$A_n(n)$").
- 但是根据我们的假设, D 就是 A_n!
- 这是个自相矛盾的结论, 所以我们一开始的假设是错误的.
- 符合塔斯基条件的 "真" 的定义不存在

塔斯基不可定义定理

实际上, 我们很多人可能都见过 D 这个句子.

- True(“$D(n)$”) 当且仅当 $D(n)$, 当且仅当 not-True($A_n(n)$)
- 但 D 就是 A_n
- 所以$A_n(n)$, 当且仅当 not-True($A_n(n)$)
- 也就是说, $A_n(n)$ 说的是: “$A_n(n)$ 不是真的”
- 这就是我们熟悉的说谎者悖论: “这句话是假的”.

一点历史

- 从古至今, 数学和逻辑讲究的是推理和证明

一点历史

- 从古至今，数学和逻辑讲究的是推理和证明
- 拿算术举例，我们可能希望找到一些算术公理，并且从这些算术公理出发，我们可以证明出所有的算术事实，而且不会证明出错误的句子

一点历史

- 从古至今，数学和逻辑讲究的是推理和证明
- 拿算术举例，我们可能希望找到一些算术公理，并且从这些算术公理出发，我们可以证明出所有的算术事实，而且不会证明出错误的句子
- 哥德尔 (1906-1978) 在 1931 年利用对角线论证证明了这个希望是无法达成的.

一点历史

- 从古至今，数学和逻辑讲究的是推理和证明
- 拿算术举例，我们可能希望找到一些算术公理，并且从这些算术公理出发，我们可以证明出所有的算术事实，而且不会证明出错误的句子
- 哥德尔 (1906-1978) 在 1931 年利用对角线论证证明了这个希望是无法达成的.
- 我们只需要将塔斯基不可定义定理中的 “True” 改成 “Provable” 即可

哥德尔不完备定理

- 句子 D 的定义: Provable($D(n)$) **当且仅当** not-Provable($A_n(n)$); not-Provable($D(n)$) **当且仅当** Provable($A_n(n)$)

哥德尔不完备定理

- 句子 D 的定义: Provable($D(n)$) 当且仅当 not-Provable($A_n(n)$); not-Provable($D(n)$) 当且仅当 Provable($A_n(n)$)
- 根据前面的讨论，句子 D 说就是: “这个句子无法被证明”

哥德尔不完备定理

- 句子 D 的定义: Provable($D(n)$) 当且仅当 not-Provable($A_n(n)$); not-Provable($D(n)$) 当且仅当 Provable($A_n(n)$)
- 根据前面的讨论, 句子 D 说就是: "这个句子无法被证明"
- 假设 D 能被证明, 那么 D 就是一个错误的句子

哥德尔不完备定理

- 句子 D 的定义: Provable($D(n)$) 当且仅当 not-Provable($A_n(n)$); not-Provable($D(n)$) 当且仅当 Provable($A_n(n)$)
- 根据前面的讨论, 句子 D 说就是: “这个句子无法被证明”
- 假设 D 能被证明, 那么 D 就是一个错误的句子
- 假设 D 无法被证明, 那么 D 就是一个算术事实

哥德尔不完备定理

哥德尔第一不完备定理

一个能正确计算加法和乘法的算术公理体系，如果我们有办法写下它的公理，那么以下两者必定有一者成立：
(i) 有一个算术事实无法被该体系证明 (ii) 该体系证明了一个错误的句子

阿兰图灵

20 世纪初期, 大家也很关注另一个问题: 计算机是不是万能的?

阿兰图灵

20 世纪初期, 大家也很关注另一个问题: 计算机是不是万能的?

即: 存不存在这样一台计算机, 使得任何有明确定义的问题, 我们都可以把这个问题的数据输入给它, 然后这台计算机就会计算出答案.

阿兰图灵

20 世纪初期, 大家也很关注另一个问题: 计算机是不是万能的?

即: 存不存在这样一台计算机, 使得任何有明确定义的问题, 我们都可以把这个问题的数据输入给它, 然后这台计算机就会计算出答案.

例: 给定车的数量, 司机的心理态度, 道路状况等, 这台计算机就可以计算出某个时间的交通状况

阿兰图灵

20 世纪初期, 大家也很关注另一个问题: 计算机是不是万能的?

即: 存不存在这样一台计算机, 使得任何有明确定义的问题, 我们都可以把这个问题的数据输入给它, 然后这台计算机就会计算出答案.

例: 给定车的数量, 司机的心理态度, 道路状况等, 这台计算机就可以计算出某个时间的交通状况

如果这样一台计算机存在, 那人类将会接近于无所不能

阿兰图灵

20 世纪初期, 大家也很关注另一个问题: 计算机是不是万能的?

即: 存不存在这样一台计算机, 使得任何有明确定义的问题, 我们都可以把这个问题的数据输入给它, 然后这台计算机就会计算出答案.

例: 给定车的数量, 司机的心理态度, 道路状况等, 这台计算机就可以计算出某个时间的交通状况

如果这样一台计算机存在, 那人类将会接近于无所不能

可惜, 阿兰图灵 (1912-1954), 通过他发明的图灵机, 于 1937 年证明了这样一台计算机不可能存在.

停机问题

图灵考虑的问题叫做 “停机问题”.

停机问题

图灵考虑的问题叫做 “停机问题”. 一台计算机, 给定一些初始数据, 就会开始运转, 如果这个运算最后得到了一个结果, 那这台计算机就会停止运转并且给出这个结果 (停机).

停机问题

图灵考虑的问题叫做“停机问题”. 一台计算机, 给定一些初始数据, 就会开始运转, 如果这个运算最后得到了一个结果, 那这台计算机就会停止运转并且给出这个结果 (停机). 如果没有得到结果, 或者出了 bug, 那它就会无止尽地跑下去, 就不会停机.

停机问题

图灵考虑的问题叫做“停机问题”. 一台计算机, 给定一些初始数据, 就会开始运转, 如果这个运算最后得到了一个结果, 那这台计算机就会停止运转并且给出这个结果 (停机). 如果没有得到结果, 或者出了 bug, 那它就会无止尽地跑下去, 就不会停机.

停机问题

存不存在一台计算机, 它可以正确判断别的计算机会不会停机? 这台计算机输入的数据就是“某台计算机 + 初始数据”, 它的输出是 1 当且仅当那台计算机在输入了那些初始数据的情况下会停机; 反之则是 0.

停机问题

图灵思考这个问题的时候也用到了对角线论证.

停机问题

图灵思考这个问题的时候也用到了对角线论证.

简单来说, 如果给定一台计算机, 我们可以问, 如果输入 1, 它会不会停机, 如果输入 2, 它会不会停机, 如果输入 3, 它会不会停机...

停机问题

图灵思考这个问题的时候也用到了对角线论证.

简单来说, 如果给定一台计算机, 我们可以问, 如果输入 1, 它会不会停机, 如果输入 2, 它会不会停机, 如果输入 3, 它会不会停机...

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \\
A_1 & \Longleftrightarrow & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \dots
\end{array}
$$

停机问题

图灵思考这个问题的时候也用到了对角线论证.

简单来说, 如果给定一台计算机, 我们可以问, 如果输入 1, 它会不会停机, 如果输入 2, 它会不会停机, 如果输入 3, 它会不会停机...

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots \\ A_1 & \Longleftrightarrow & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \ldots \end{array}$$

我们已经很熟悉这样的设定了.

一个小问题

“等一下，我们前面能把句子/员工等排序成 $(A_1, A_2, A_3, \ldots)$，可是计算机要怎么来这样排序呢？”

一个小问题

"等一下, 我们前面能把句子/员工等排序成 $(A_1, A_2, A_3, \ldots)$, 可是计算机要怎么来这样排序呢?"

图灵发明图灵机就是为了解决这个疑虑.

一个小问题

"等一下，我们前面能把句子/员工等排序成 $(A_1, A_2, A_3, \ldots)$，可是计算机要怎么来这样排序呢？"

图灵发明图灵机就是为了解决这个疑虑.

事实

每一个图灵机都能被一个自然数所表示.

Fundamental Assumption of Computer Science

邱奇-图灵论题：任何我们能想象出来的计算机（量子计算机，人工智能，算盘，数手指,...）都等价于某一个图灵机.

一个小问题

“等一下, 我们前面能把句子/员工等排序成 $(A_1, A_2, A_3, \ldots)$, 可是计算机要怎么来这样排序呢?”

图灵发明图灵机就是为了解决这个疑虑.

事实

每一个图灵机都能被一个自然数所表示.

Fundamental Assumption of Computer Science

邱奇-图灵论题: 任何我们能想象出来的计算机 (量子计算机, 人工智能, 算盘, 数手指,...) 都等价于某一个图灵机.

这样一来, 我们就解决了用 $(A_1, A_2, A_3 \ldots)$ 来表示计算机的麻烦.

停机问题无法解决

$A_5(1) = 1$ 的意思是 “编号为 5 的计算机，在初始数据是 1 的时候会停机”.

停机问题无法解决

$A_5(1) = 1$ 的意思是 “编号为 5 的计算机, 在初始数据是 1 的时候会停机”.

- 计算机 D 的定义是: $D(n) = 1$ 当且仅当 $A_n(n) = 0$; $D(n) = 0$ 当且仅当 $A_n(n) = 1$

停机问题无法解决

$A_5(1) = 1$ 的意思是 “编号为 5 的计算机, 在初始数据是 1 的时候会停机”.

- 计算机 D 的定义是: $D(n) = 1$ 当且仅当 $A_n(n) = 0$; $D(n) = 0$ 当且仅当 $A_n(n) = 1$
- D 在输入 n 的情况下会停机当且仅当 A_n 在输入 n 的情况下不停机

停机问题无法解决

$A_5(1) = 1$ 的意思是 "编号为 5 的计算机, 在初始数据是 1 的时候会停机".

- 计算机 D 的定义是: $D(n) = 1$ 当且仅当 $A_n(n) = 0$; $D(n) = 0$ 当且仅当 $A_n(n) = 1$
- D 在输入 n 的情况下会停机当且仅当 A_n 在输入 n 的情况下不停机
- 根据前面类似的讨论, 我们可以知道: 任何一台想要解决停机问题的计算机, 都无法正确判断 D 的停机状态.

停机问题无法解决

$A_5(1) = 1$ 的意思是“编号为 5 的计算机，在初始数据是 1 的时候会停机”.

- 计算机 D 的定义是：$D(n) = 1$ 当且仅当 $A_n(n) = 0$; $D(n) = 0$ 当且仅当 $A_n(n) = 1$
- D 在输入 n 的情况下会停机当且仅当 A_n 在输入 n 的情况下不停机
- 根据前面类似的讨论，我们可以知道：任何一台想要解决停机问题的计算机，都无法正确判断 D 的停机状态.
- 也就是说，可以解决停机问题的计算机不存在.

回顾

我们今天讨论的内容:

- 我们对数量和集合大小的概念是什么
- 我们可以用这个概念去讨论无限大的集合的大小
- 康托尔定理/对角线论证: 无限大能比较大小
- 对角线论证的抽象化
- 对角线论证在语言上的应用: "真" 不可定义
- 对角线论证在证明上的应用: 数学公理不可能完备
- 对角线论证在计算机上的应用: 计算机不是万能的