Magidor Characterization of Supercompactness and Generic Ultrapower

陈泽晟

2020/7/22

回顾：可测基数与初等嵌入

定义

一个基数 κ 是可测基数当且仅当存在一个初等嵌入 $j : V \prec M$ 使得 $\mathrm{crit}(j) = \kappa$，并且 ${}^{\kappa}M \subseteq M$.

等价地，κ 是可测基数当且仅当 κ 上存在一个 κ-完备的非主超滤 (κ-complete nonprincipal ultrafilter)．如果存在这样一个滤超滤，我们也会将它叫做测度 *(measure)*.

定义 (Ultrapower)

令 Z 为一个集合，U 为 Z 上的一个超滤．我们考虑所有 $f\colon Z \to V$，并且定义等价关系：$f =^* g \Leftrightarrow \{i \in Z \mid f(i) = g(i)\} \in U$ (直觉：f 跟 g 在 U 认为的大多数情况下都相等)．
类似地，定义元素关系为 $f \in^* g \Leftrightarrow \{i \in Z \mid f(i) \in g(i)\} \in U$．
给定一个 f，与 f 等价的 g 将会构成真类．我们应用 Scott's trick 来使得 f 的等价类构成集合：
$[\![f]\!]_U = \{g \mid f =^* g \wedge (\forall h)(h =^* f \to \mathrm{rank}(g) \leq \mathrm{rank}(h))\}$．当 U 在语境中清楚时，我们会省略掉 U 这个下标．
令 $\prod_U V/ =^* \; := \{[\![f]\!] \mid f\colon Z \to V\}$．

定理 (Łoś 定理)

$\prod_U V/ =^* \vDash \varphi[[\![f_1]\!], \ldots, [\![f_n]\!]]$，当且仅当 $\{i \in Z \mid V \vDash \varphi[f_1(i), \ldots, f_n(i)]\} \in U$ *(直觉：φ 在 f_j 们的投票选择参数的情况下，在 U 认为的大多数情况都成立)*

推论

定义函数 $j' = j'_U : V \to \prod_U V/=^*$ 为 $a \mapsto [\![c_a]\!] = [\![\lambda x.a]\!]$, 则 j 是一个初等嵌入, 即

$$V \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Leftrightarrow \prod_U V/=^* \models \varphi[j'(a_1), \dots, j'(a_n)]$$

事实

如果 κ 是可测基数并且 U 是 κ 上的 κ-完备非主超滤, 那么 $\prod_U V/=^*$ 将会是 *set-like, well-founded, and extensional.* 所以我们可以使用 *Mostowski collapse* 来得到传递类 $\mathrm{Ult} = \mathrm{Ult}(V, U)$ 以及 *collapse isomorphism* $\pi : (\mathrm{Ult} = \mathrm{Ult}(V, U), \in) \cong (\prod_U V/=^*, \in^*)$. 我们将 $\pi([\![f]\!])$ 写作 $[f]$ 令 $j = j_U := \pi \circ j' : V \to \mathrm{Ult}$, 则 j 为初等嵌入. 不严谨地, 我们会把 Ult 也叫做 *ultrapower* 和把 j 叫做 *ultrapower embedding*

Seed Theory

给定一个 $j : V \prec M$, $\mathrm{crit}(j) = \kappa$, 我们可以用 κ“种” 出一个 κ-完备的非主超滤:

$$U_j = \{X \subseteq \kappa \mid \kappa \in j(X)\}$$

这样一个非主超滤在文献中也叫做 the normal measure derived from j, 或者 the derived measure.

事实

U_j 有着如下性质:

1. *(uniform)* 如果 $X \in U_j$, 那么 $|X| = \kappa$
2. *(weakly uniform)* 由上一点推论出: 对于任意 $\gamma < \kappa$, $[\gamma, \kappa) \in U_j$
3. *(normal)* 如果 $f : \kappa \to \kappa$ 满足 $\{i \in \kappa \mid f(i) < i\} \in U$, 那么则存在 $\gamma < \kappa$ 使得 $\{i \in \kappa \mid f(i) = \gamma\} \in U$

推论 (Reflection argument)

令 κ 为可测基数, 则 κ 是第 κ 个不可达基数

证明.

让 $j : V \prec M$ 见证 κ 的可测性. 取 the derived measure U_j 并且构造 $\mathrm{Ult}(V, U_j)$. 因为 κ 在 V 中是不可达基数, 并且不可达性是一个 Π_1 性质, 所以 $\mathrm{Ult} \models$ "$\kappa < j(\kappa)$ 是不可达基数". 令 $I = \{\gamma < \kappa \mid \gamma$ 是不可达基数$\}$, 我们则可以由上述断定 $\kappa \in j(I)$, 所以 $I \in U_j$. 根据 uniformity, $|I| = \kappa$, 即 κ 底下的不可达基数有 κ 那么多个. $\square$

定义

如果 $j: V \prec M$, $\mathrm{crit}(j) = \kappa$, 令 Z 为任意集合, 令 $U_a = \{X \subseteq Z \mid a \in j(X)\}$, 我们称 $a \in j(Z)$ 为超滤 $U_a \subseteq \mathcal{P}(Z)$ 的种子. 如果对于 V 中的某个函数 f, 我们有 $j(f)(a) = b$, 那么我们说 a 生成 (generates)b . 如果 M 中每一个元素都被 a 所生成, 那么我们说 a 生成 M.

定理 (Seed Lemma)

一个初等嵌入 $j : V \prec M$ 是一个 *ultrapower embedding* 当且仅当存在一个种子 a 使得 a 生成 M. 如果这个 a 存在, 那么令 a 为 U_a 的种子, 我们则有 $[f] = j(f)(a)$

定理 (Seed Lemma)

一个初等嵌入 $j : V \prec M$ 是一个 *ultrapower embedding* 当且仅当存在一个种子 a 使得 a 生成 M. 如果这个 a 存在, 那么令 a 为 U_a 的种子, 我们则有 $[f] = j(f)(a)$

证明.

$(\Rightarrow)$: 令 Z 为一个集合, U 为 Z 上的一个非主超滤, 令 $\mathrm{id} : Z \to Z$ 为 $z \mapsto z$. 则 $[\mathrm{id}] \in j(Z)$. 我们证明 $[\mathrm{id}]$ 生成 M. 令 $f : Z \to V$ 为函数, c_f 为 $\lambda x.f$. 则我们有

$$j(f)([id]) = [c_f]([id]) = [\langle f(i) \mid i \in Z\rangle] = [f].$$

$(\Leftarrow)$: 假设种子 a 生成 M, 我们定义 $U = \{X \subseteq Z \mid a \in j(X)\}$. 这样一个 U 将是一个 $\mathrm{crit}(j) = \kappa$-完备非主超滤. 我们用 U 来构建相应的 ultrapower embedding $j_U : V \prec \mathrm{Ult}(V, U)$. 我们将证明 $j = j_U$, $M = \mathrm{Ult}(V, U)$.
定义 $k : \mathrm{Ult}(V, U) \to M$ 为 $k([f]_U) = j(f)(a)$. 我们验证 k 是良定义的 (invariant under choice of representative), 即:

$$
\begin{aligned}
f =_U g &\Leftrightarrow \{i \in Z \mid f(i) = g(i)\} \in U \\
&\Leftrightarrow a \in j(\{i \in Z \mid f(i) = g(i)\}) \\
&\Leftrightarrow j(f)(a) = j(g)(a)
\end{aligned}
$$

同样的论证也能告诉我们 k 是一个 $\in$-homomorphism. 同时, 由于 a 生成 M, 所以 k 将会是满射. 所以 k 是一个 $\in$-isomorphism. 然而内模型上的 $\in$-isomorphism 只有 identity 这一种 (假设 k 不是 identity, 取最小 rank 的 $x \neq k(x)$, 得到矛盾). 所以 $M = \mathrm{Ult}(V, U)$, 以及

$$
j_U(x) = [c_x] = k([c_x]) = j(c_x)(a) = j(x)
$$

□

推论

令 $j : V \prec M$ 为初等嵌入, $\mathrm{crit}(j) = \kappa$, 则 j 为 κ 上的一个 *normal measure* 相应的 *ultrapower embedding* 当且仅当 κ 是一个生成 M 的种子

证明用到一个事实: 在 κ 上的 normal measure 构造的 ultrapower 里, $[id] = \kappa$.

引理 (Closure Lemma)

令 $j : V \prec M$ 为 *ultrapower embedding*, 令 $\lambda \in \mathrm{Ord}$. 则 ${}^{\lambda}M \subseteq M$ 当且仅当 $j``\lambda \in M$

Proof: ($\Rightarrow$): 显然.
($\Leftarrow$): 根据 Seed Lemma, 存在种子 a 生成 M. 令 $\langle z_\alpha \mid \alpha < \lambda \rangle \in {}^{\lambda}M$. 因为 a 生成 M, 所以每一个 z_α 都对应着一个 f_α, 使得 $j(f_\alpha)(a) = z_\alpha$.
此时我们考虑 $j(\langle z_\alpha \mid \alpha < \lambda \rangle)$. 在 M 中, 这是一个长度为 $j(\lambda)$ 的序列, 其中如果 $\beta < \lambda$, 则第 $j(\beta)$ 项为 $j(f_\alpha)$. 但是因为 $j``\lambda \in M$, 所以 $\langle j(f_\alpha)(a) \mid \alpha \in j``\lambda \rangle \in M$. 而这个序列就是 $\langle z_\alpha \mid \alpha < \lambda \rangle$. $\square$

定义

我们说一个基数 κ 是 λ-supercompact(超紧?) 的, 当且仅当存在初等嵌入 $j: V \prec M$ 满足

- $\mathrm{crit}(j) = \kappa$
- $j(\kappa) > \lambda$
- ${}^{\lambda}M \subseteq M$

如果对于所有 λ, κ 都是 λ-supercompact 的, 那么我们说 κ 是一个 supercompact cardinal.

定义

我们说一个基数 κ 是 λ-supercompact(超紧?) 的, 当且仅当存在初等嵌入 $j : V \prec M$ 满足

- $\mathrm{crit}(j) = \kappa$
- $j(\kappa) > \lambda$
- ${}^{\lambda}M \subseteq M$

如果对于所有 λ, κ 都是 λ-supercompact 的, 那么我们说 κ 是一个 supercompact cardinal.

一些观察: 如果 κ 是可测基数, 那么 κ 是 κ-supercompact. 如果 $\lambda' < \lambda$ 并且 κ 是 λ-supercompact, 那么 κ 也是 λ'-supercompact.

一些观察: supercompact 的定义与我们目前接触到的大基数定义有一个非常本质的区别: 它不是 local 的 (它不能在某一个集合结构上得到验证). 这里具体的意思是: 如果 κ 是强不可达基数 (Π_1 性质), 这件事情在 V_κ 中就能知道; 如果 κ 是可测基数 (Σ_2 性质, 感兴趣的同学可以自行验证), 那么见证这个性质的超滤在 $V_{\kappa+2}$ 就能找到. 相比之下, supercompact 是一个 "global property", 我们无法在哪个 V_λ 中知道 κ 是 supercompact (不过如果 κ 不是 supercompact 的话, 那么这点可以在某个 V_λ 中知道).

最小的 supercompact 要比最小的 measurable 大上许多:

Proposition

如果 κ 是 supercompact, 那么 κ 是第 κ 个可测基数.

证明.

我们用反射论证. 令 $j : V \prec M$ 见证 κ 的 2^κ-supercompact. 取 derived measure $U = \{X \subseteq \kappa \mid \kappa \in j(X)\}$. 但是由于 ${}^{2^\kappa}M \subseteq M$, κ 上的每一个超滤都在 M 中. 所以 $M \vDash$ "$\kappa < j(\kappa)$ 是可测基数". 所以如果 $N = \{\gamma < \kappa \mid \gamma$是可测基数$\}$, 那么 $\kappa \in j(N)$. 因此 $N \in U$. 所以 κ 下面的可测基数有 κ 那么多. $\square$

直觉上, supercompact 应该要比可测基数有着更强的反射性质. 下面命题则体现出了两者反射性质的差别之一.

事实

令 κ 为可测基数, 假设 *GCH* 在 κ 之下成立, 那么 $2^\kappa = \kappa^+$(即 *GCH* 在 κ 处也成立)

Proposition

令 κ 为 supercompact, 假设假设 GCH 在 κ 之下成立, 则 GCH 成立.

证明.

我们证明: 如果 κ 是 λ-supercompact 并且 GCH 在 κ 之下成立, 那么 GCH 在 λ 之下也成立. 令 $j: V \prec M$ 见证 κ 的 λ-supercompactness. 因为 $V \vDash$ “GCH 在 κ 之下成立”, 所以 $M \vDash$ “GCH 在 $j(\kappa)$ 之下成立”. 由于 $j(\kappa) > \lambda$, 所以如果 $\alpha \leq \lambda$, 则 $(2^\alpha)^M = (\alpha^+)^M$. 此时又因为我们有 ${}^\lambda M \subseteq M$, 所以我们可以对 $\alpha \leq \lambda + 1$ 归纳证明 $V_\alpha = (V_\alpha)^M$, 所以 $2^\alpha \leq (2^\alpha)^M = (\alpha^+)^M = \alpha^+$. $\square$

我们可以证明一个更一般的事实：如果 κ 是 supercompact，那么 $V_\kappa \prec_2 V$. 我们先证明一个引理:

引理

对于不可数基数 κ, $H_\kappa \prec_1 V$. 这里 $H_\kappa = \{x : |\mathrm{trcl}(x)| < \kappa\}$ 是一个传递集合.

证明.

如果 $H_\kappa \vDash \varphi$, 其中 φ 是 Σ_1, 那么根据 Σ_1 的向上绝对性, V 也同样满足 φ.

假设 $V \vDash \exists x \psi(x, a)$, 其中 ψ 是 Δ_0, $a \in H_\kappa$. 根据反射原理, 存在 $V_\alpha \vDash \exists x \psi(x, a)$. 令 N ($|N| < \kappa$) 为 $\mathrm{trcl}(a)$ 在 V_α 中的 Skolem hull. 则 N 是 extensional 和 well-founded 的. 令 M 为 N 的 Mostowski collapse, 则 $M \subseteq H_\kappa$. 而因为 $M \vDash \exists x \psi(x, a)$, 而 Σ_1 是向上绝对的, 所以 $H_\kappa \vDash \exists x \psi(x, a)$. □

如果 κ 是 supercompact, 那么 $V_\kappa \prec_2 V$.

证明.

首先注意因为 κ 是不可达基数, 所以 $H_\kappa = V_\kappa$. 如果 $V_\kappa \vDash (\exists x)(\forall y)\psi(x,y,c)$, 则根据前面的引理, $V_\kappa \prec_1 V$, 所以 Σ_2 语句对 V_κ 来说是向上绝对的. 所以 V 也满足这个语句.

相反地, 现在假设 $V \vDash (\exists x)(\forall y)\psi(x,y,c)$, 其中 $c \in V_\kappa$. 令 a 见证这一语句. 我们挑选足够大的 λ 使得 $a \in V_\lambda$, 并且令 $j : V \prec M$ 见证 κ 的 $|V_\lambda|$-supercompactness. 注意到如果 ${}^{|V_\lambda|}M \subseteq M$, 那么 $a \in V_\lambda = (V_\lambda)^M \subseteq M$ (suppose not, take counterexample of least rank).

所以: $V \vDash (\forall y)\psi(a,y,c)$, 并且 $a, c \in M$, 根据 Π_1 的向下绝对性, $M \vDash (\forall y)\psi(a,y,c)$. 又因为 $a, c \in (V_{j(\kappa)})^M$, 我们再一次使用向下绝对性得到 $V^M_{j(\kappa)} \vDash (\forall y)\psi(a,y,c)$. 但是 $j(c) = c$, 所以这告诉了我们 $M \vDash$ "$V_{j(\kappa)} \vDash (\exists x)(\forall y)\psi(x,y,j(c))$". 此时根据 j 的初等性, 我们可以得到: $V \vDash$ "$V_\kappa \vDash (\exists x)(\forall y)\psi(x,y,c)$". □

Filter Characterization

在考虑 Magidor characterization 之前，我们先给出 supercompact 的另外一个等价的一阶定义 (Magidor 的证明中将会用到这个定义). 要理解这个定义背后的思想，我们回顾一下之前的一个引理:

引理 (Closure Lemma)

令 $j : V \prec M$ 为 *ultrapower embedding*, 令 $\lambda \in \mathrm{Ord}$. 则 ${}^{\lambda}M \subseteq M$ 当且仅当 $j"\lambda \in M$

如果 $i : V \prec M$ 见证 κ 的 λ-supercompactness, 那么 $i"\lambda \in M$. 这个方向不需要假设 i 是一个 ultrapower embedding. 我们想要一个对超滤的推广，使得我们可以得到形如 "如果存在一个如何如何的超滤，那么这个超滤的 ultrapower $j : V \prec \mathrm{Ult}$ 满足 $j"\lambda \in M$" 这样的结论. 因为 j 是 ultrapower embedding, 所以上述引理就告诉了我们 j 见证 κ 的 λ-supercompactness" 的条件.
此时 seed theory 的一般性就可以派上用场了.

之前介绍 seed theory 时，我们并没有要求种子必须要是哪些类型的对象，所以除了拿序数本身当种子之外，我们还可以考虑拿序数集来当种子.
如果 $j : V \prec M$ 是一个初等嵌入，$\mathrm{crit}(j) = \kappa$，我们可以尝试拿 $j``\lambda$ 来当种子. 也就是说，我们种出来的 derived measure 将会是
$U = \{X \mid j``\lambda \in j(X)\}$.

之前介绍 seed theory 时，我们并没有要求种子必须要是哪些类型的对象，所以除了拿序数本身当种子之外，我们还可以考虑拿序数集来当种子.
如果 $j : V \prec M$ 是一个初等嵌入，$\mathrm{crit}(j) = \kappa$，我们可以尝试拿 $j``\lambda$ 来当种子. 也就是说，我们种出来的 derived measure 将会是
$U = \{X \mid j``\lambda \in j(X)\}$.
我们先观察一下 U 会生活在哪里 (是什么类型的对象). 如果 $X \in U$，那么 $j``\lambda \in j(X)$. 此时我们注意到 $j``\lambda \in \mathcal{P}(j(\lambda))$. 所以 U 的元素应该是 $\mathcal{P}(\lambda)$ 的子集 (对比见证可测性的超滤，那种超滤的元素是 κ 的子集). 我们还可以更精确地控制我们想要的空间: 注意到 $|j``\lambda| = \lambda < j(\kappa)$，所以我们可以只考虑 $P(\lambda)$ 上那些势小于 κ 的集合就行了，我们的滤只需要测量这些集合的大小. 这自然地为我们引入了如下定义.

之前介绍 seed theory 时，我们并没有要求种子必须要是哪些类型的对象，所以除了拿序数本身当种子之外，我们还可以考虑拿序数集来当种子.
如果 $j : V \prec M$ 是一个初等嵌入，$\mathrm{crit}(j) = \kappa$，我们可以尝试拿 $j``\lambda$ 来当种子. 也就是说，我们种出来的 derived measure 将会是
$U = \{X \mid j``\lambda \in j(X)\}$.
我们先观察一下 U 会生活在哪里 (是什么类型的对象). 如果 $X \in U$，那么 $j``\lambda \in j(X)$. 此时我们注意到 $j``\lambda \in \mathcal{P}(j(\lambda))$. 所以 U 的元素应该是 $\mathcal{P}(\lambda)$ 的子集 (对比见证可测性的超滤，那种超滤的元素是 κ 的子集). 我们还可以更精确地控制我们想要的空间：注意到 $|j``\lambda| = \lambda < j(\kappa)$，所以我们可以只考虑 $P(\lambda)$ 上那些势小于 κ 的集合就行了，我们的滤只需要测量这些集合的大小. 这自然地为我们引入了如下定义.

定义

令 $\kappa \leq \lambda$ 为基数. $\mathcal{P}_\kappa\lambda = \{X \subseteq \lambda : |X| < \kappa\}$.

定义

假设 $j : V \prec M$ $(\mathrm{crit}(j) = \kappa)$ 满足 $j(\kappa) > \lambda$ 并且 $j``\lambda$ 生成 M, 那么我们就说 j 是一个 λ-supercompact embedding.

根据 seed lemma, λ-supercompact embedding 将会是 ultrapower embedding. 所以我们想刻画能给我们带来 λ-supercompact embedding 的超滤.

定义

令 U 为 $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上的 κ-完备超滤，我们说 U 是精细 *(fine)* 的，当且仅当对于每个 $\alpha < \lambda$，我们都有 $X_\alpha = \{s \in \mathcal{P}_\kappa\lambda \mid \alpha \in s\} \in U$.

定义

令 $f\colon X \to \lambda$ 为定义在 $X \subseteq \mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上的函数，我们说 f 是 regressive 的，当且仅当 $f(s) \in s$ 对所有的 $s \in X$ 都成立. 如果 $Y \subseteq X$，那 "f 在 Y 上是 regressive 的" 意思是 $f \restriction Y$ 是 regressive 的.

定义

令 U 为 $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上的 κ 超滤，我们说 U 是 normal 的，当且仅当对于任意的 $f\colon \mathcal{P}_\kappa\lambda \to \lambda$ 我们都有：如果 f 在一个 U 中的集合上是 regressive 的，那么 f 将会在 U 中的一个集合上是 constant 的.

利用这些定义，我们将在接下来的 3 个 slides 里给出 supercompact 的 filter characterization

假设 $j: V \prec M$ 见证 κ 的 λ-supercompactness, 那么通过 $j``\lambda$ 得到的 derived measure $U := \{X \subseteq \mathcal{P}_\kappa\lambda \mid j``\lambda \in j(X)\}$ 则是 normal 和精细的

证明.

κ-完备性的证明与可测基数的情况类似. 我们检查精细性. 令 $\alpha < \lambda$, 以及 $X_\alpha = \{s \in \mathcal{P}_\kappa\lambda \mid \alpha \in s\}$, 我们想证明 $X_\alpha \in U$, 即 $j``\lambda \in j(X_\alpha)$. 根据初等性:$j(X_\alpha) = \{s \in \mathcal{P}_{j(\kappa)}j(\lambda) : j(\alpha) \in s\}$. 显然, $\alpha \in \lambda$ 蕴涵 $j(\alpha) \in j``\lambda$.

normality: 令 $f : \mathcal{P}_\kappa\lambda \to \lambda$ 在 $X \in U$ 上为 regressive 的, 这意味着 $j``\lambda \in j(X)$, 即 $j(f)(j``\lambda) \in j``\lambda$. 注意到 $j``\lambda = \{j(\alpha) \mid \alpha \in \lambda\}$. 所以 $j(f)(j``\lambda) = j(\alpha)$ 对于某个 $\alpha < \lambda$ 成立. 也就是说, $j``\lambda \in j(\{s \in \mathcal{P}_\kappa\lambda \mid f(s) = \alpha\})$. 根据 U 的定义, 我们断定 $\{s \in \mathcal{P}_\kappa\lambda \mid f(s) = \alpha\} \in U$. □

假设 $j: V \prec M$ 是 $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上的一个 normal, fine measure 相应的 ultrapower embedding, 那么 $j``\lambda = [id] \in M$, 并且 ${}^\lambda M \subseteq M$.

证明.

我们只需要证明 $j``\lambda = [\mathrm{id}]$ $(\mathrm{id}: \mathcal{P}_\kappa\lambda \to \mathcal{P}_\kappa\lambda)$. 这样 Closure Lemma 就能告诉我们 ${}^\lambda M \subseteq M$.

$j``\lambda \subseteq [\mathrm{id}]$: 令 $\alpha \in \lambda$. 根据精细性我们有 $X_\alpha \in U$, 注意到 $X_\alpha = \{s \in \mathcal{P}_\kappa\lambda \mid \alpha \in s\}$, 所以 $j(\alpha) \in [\mathrm{id}]$ (因为 $\{s \in \mathcal{P}_\kappa\lambda \mid c_\alpha(s) \in \mathrm{id}(s)\} = X_\alpha$).

$[\mathrm{id}] \subseteq j``\lambda$: 令 $[f] \in [\mathrm{id}]$, 则 $\{s \in \mathcal{P}_\kappa\lambda \mid f(s) \in s = \mathrm{id}(s)\} \in U$. 此时根据 normality, 我们可以找到 $\gamma < \lambda$ 使得 $\{s \in \mathcal{P}_\kappa\lambda \mid f(s) = c_\gamma(s) = \gamma\} \in U$. 所以 $[f] = [c_\gamma] = j(\gamma) \in j``\lambda$. □

假设假设 $j: V \prec M$ 是 $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上的一个 normal, fine measure 相应的 ultrapower embedding. 那么 $\mathrm{crit}(j) = \kappa$ 并且 $j(\kappa) > \lambda$

证明.

在 Seed Lemma 的证明中, 我们留意到 $[\mathrm{id}]$ 是一个通过 j 能生成 M 的种子. 也就是说, M 中的每一个元素都形如 $j(f)([\mathrm{id}])$. 根据上一个命题, $j(f)([\mathrm{id}]) = j(f)(j``\lambda)$. 对于 $x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda$, 我们定义 $\kappa_x = x \cap \kappa$, $\lambda_x = \mathrm{otp}(x)$.

我们留意到 $\mathrm{otp}(j``\lambda) = \lambda$. 考虑函数 $x \mapsto \lambda_x$, 由于 $\mathrm{otp}(j``\lambda)$ 不会因为背景空间改变而改变, 我们有 $j(x \mapsto \lambda_x)(j``\lambda) = \lambda$. 所以我们知道 $[x \mapsto \lambda_x] = \lambda$. 此时注意到对于任意 $x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda$, 我们都有 $\lambda_x < \kappa$, 所以 $j(\kappa) = [c_\kappa] > \lambda$ (因为 $\{y \in \mathcal{P}_\kappa\lambda \mid c_\kappa(y) > (x \mapsto \lambda_x)(y)\} \in U$). $\square$

假设假设 $j: V \prec M$ 是 $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上的一个 normal, fine measure 相应的 ultrapower embedding. 那么 $\mathrm{crit}(j) = \kappa$ 并且 $j(\kappa) > \lambda$

证明.

在 Seed Lemma 的证明中, 我们留意到 $[\mathrm{id}]$ 是一个通过 j 能生成 M 的种子. 也就是说, M 中的每一个元素都形如 $j(f)([\mathrm{id}])$. 根据上一个命题, $j(f)([\mathrm{id}]) = j(f)(j"\lambda)$. 对于 $x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda$, 我们定义 $\kappa_x = x \cap \kappa$, $\lambda_x = \mathrm{otp}(x)$.

我们留意到 $\mathrm{otp}(j"\lambda) = \lambda$. 考虑函数 $x \mapsto \lambda_x$, 由于 $\mathrm{otp}(j"\lambda)$ 不会因为背景空间改变而改变, 我们有 $j(x \mapsto \lambda_x)(j"\lambda) = \lambda$. 所以我们知道 $[x \mapsto \lambda_x] = \lambda$. 此时注意到对于任意 $x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda$, 我们都有 $\lambda_x < \kappa$, 所以 $j(\kappa) = [c_\kappa] > \lambda$ (因为 $\{y \in \mathcal{P}_\kappa\lambda \mid c_\kappa(y) > (x \mapsto \lambda_x)(y)\} \in U$). □

把这三个命题放在一起, 我们就有了一个在 ZFC 中可以表达的 supercompact 的定义: κ 是 supercompact 的, 当且仅当对于每一个 $\lambda > \kappa$, 在 $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上都有一个 normal fine measure.

Magidor Characterization

定理 (Magidor)

κ 是 *supercompact* 当且仅当对于任意 $\alpha > \kappa$, 都存在一个 $\beta < \kappa$, 以及初等嵌入 $k : V_\beta \prec V_\alpha$, 使得 $k(\mathrm{crit}(k)) = \kappa$

证明.

($\Rightarrow$): 给定 $\alpha > \kappa$, 令 $j : V \prec M$ 见证 $|V_\alpha|$-supercompact. 令 $\hat{j} = j \restriction V_\alpha$. 根据初等性, 不难看出 $\hat{j} : V_\alpha \prec (V_{j(\alpha)})^M$. 由于 M 对于 $|V_\alpha|$-序列闭包, 则 $V_\alpha = (V_\alpha)^M$, 所以 $\hat{j} \in M$. 那么此时 M 会认为 $\hat{j} : V_\alpha \prec V_{j(\alpha)}$. 如果我们对 α, k 进行 existential generalization, 那么就可以得到 $M \vDash \exists \beta < j(\kappa) \exists k : V_\beta \prec V_{j(\alpha)} \wedge k(\mathrm{crit}(k)) = j(\kappa)$. 这个命题返回到 V 上就是 $V \vDash \exists \beta < \kappa \exists k : V_\beta \prec V_\alpha \wedge k(\mathrm{crit}(k)) = \kappa$

证明.

(⇐): 令 $\lambda > \kappa$. 我们想要证明 $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上存在一个 normal, fine measure.

考虑 $\lambda + \omega$. 根据假设, 存在一个 $\beta < \kappa$ 以及 $k : V_\beta \prec V_{\lambda+\omega}$. 令 $\mathrm{crit}(k) = \delta$. 则根据假设有 $j(\delta) = \kappa$. 此时留意 $V_{\lambda+\omega} \models$ “存在一个最大的极限序数” $\wedge$ “λ 是最大的极限序数”. 根据初等性, $V_\beta \models$ 存在一个最大的极限序数”. 如果 γ 是 V_β 认为的最大的极限序数, 那么 $k(\gamma) = \lambda$. 注意: $\mathcal{P}_\delta\gamma) \subseteq V_\beta$, 并且 $k"\beta \in \mathcal{P}_\kappa\lambda$. 我们接下来就要用 $k"\beta$ 做种子来种一个 normal fine measure. 具体地, 我们定义 $U \subseteq P(P_\delta\gamma)$:

$$X \in U \Leftrightarrow k"\beta \in k(X)$$

跟之前同样的论证也能告诉我们 U 是在 $P(P_\delta\gamma$ 上的 normal fine measure. 对这个命题使用 k, 我们得到: $k(U)$ 是 $\mathcal{P}_{k(\delta)}k(\gamma) = \mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上的 normal fine measure. □

一些规定

给定一个偏序集 $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$, 我们说 $G \subseteq \mathbb{P}$ 是一个 filter, 当且仅当:

- $(\forall p, q \in G)(\exists r \in G)(r \leq p \wedge r \leq q)$
- $(\forall p \in G)(\forall q \in \mathbb{P})(p \leq q \to q \in G)$

$D \subseteq \mathbb{P}$ 是稠密 (dense) 的, 当且仅当 $(\forall p \in \mathbb{P})(\exists q \leq p)(q \in D)$.

如果 $\mathbb{P}$ 中存在一个元素 x 满足 $(\forall y \in \mathbb{P})(y \leq x)$, 我们会将 x 写作 1. (我们甚至可以默认我们接触的力迫偏序都有一个 1 元素. 这样得到的力迫跟 Weaver 定义的是等价的. 见 Kunen 第 7 章练习 B1, B2).

我们力迫时不再用 generic ideal, 而是用 generic filter (这与文献中的用法更一致). 因为 filter 就是 ideal 的 dual notion, 所以这个选择仅仅是出于方便.

Generic Ultrapower: the big picture

现在我们进入 generic ultrapower 的话题. 我们知道, 存在 $j : V \prec M$ 等价于存在一个可测基数. 这里的 j 是一个可定义真类. 特别地, j 是在 V(这里的 V 指的是目前所处的宇宙) 中定义的. 一旦有 j 满足这个定义, V 中就自动有了大基数.

Generic Ultrapower: the big picture

现在我们进入 generic ultrapower 的话题. 我们知道, 存在 $j: V \prec M$ 等价于存在一个可测基数. 这里的 j 是一个可定义真类. 特别地, j 是在 V(这里的 V 指的是目前所处的宇宙) 中定义的. 一旦有 j 满足这个定义, V 中就自动有了大基数.

问题是, 有时候我们不知道 V 中有没有大基数, 或者有时候我们知道 V 中不能有大基数, 或者是有时候 V 中的大基数太大了, 以至于对眼前的问题无法产生什么影响. 更具体一些, 我们有下面这个难题

Generic Ultrapower: the big picture

现在我们进入 generic ultrapower 的话题. 我们知道, 存在 $j : V \prec M$ 等价于存在一个可测基数. 这里的 j 是一个可定义真类. 特别地, j 是在 V(这里的 V 指的是目前所处的宇宙) 中定义的. 一旦有 j 满足这个定义, V 中就自动有了大基数.

问题是, 有时候我们不知道 V 中有没有大基数, 或者有时候我们知道 V 中不能有大基数, 或者是有时候 V 中的大基数太大了, 以至于对眼前的问题无法产生什么影响. 更具体一些, 我们有下面这个难题

- 我们想要有对象使得我们能像有大基数那样利用反射论证或者别的什么论证方法.

现在我们进入 generic ultrapower 的话题. 我们知道, 存在 $j : V \prec M$ 等价于存在一个可测基数. 这里的 j 是一个可定义真类. 特别地, j 是在 V(这里的 V 指的是目前所处的宇宙) 中定义的. 一旦有 j 满足这个定义, V 中就自动有了大基数.

问题是, 有时候我们不知道 V 中有没有大基数, 或者有时候我们知道 V 中不能有大基数, 或者是有时候 V 中的大基数太大了, 以至于对眼前的问题无法产生什么影响. 更具体一些, 我们有下面这个难题

- 我们想要有对象使得我们能像有大基数那样利用反射论证或者别的什么论证方法.
- 但是反射论证的强度来自于 ultrapower 嵌入的强度

Generic Ultrapower: the big picture

现在我们进入 generic ultrapower 的话题. 我们知道, 存在 $j : V \prec M$ 等价于存在一个可测基数. 这里的 j 是一个可定义真类. 特别地, j 是在 V(这里的 V 指的是目前所处的宇宙) 中定义的. 一旦有 j 满足这个定义, V 中就自动有了大基数.

问题是, 有时候我们不知道 V 中有没有大基数, 或者有时候我们知道 V 中不能有大基数, 或者是有时候 V 中的大基数太大了, 以至于对眼前的问题无法产生什么影响. 更具体一些, 我们有下面这个难题

- 我们想要有对象使得我们能像有大基数那样利用反射论证或者别的什么论证方法.
- 但是反射论证的强度来自于 ultrapower 嵌入的强度
- 我们希望我们嵌入的 ultrapower 是 well-founded 的

Generic Ultrapower: the big picture

现在我们进入 generic ultrapower 的话题. 我们知道, 存在 $j : V \prec M$ 等价于存在一个可测基数. 这里的 j 是一个可定义真类. 特别地, j 是在 V(这里的 V 指的是目前所处的宇宙) 中定义的. 一旦有 j 满足这个定义, V 中就自动有了大基数.

问题是, 有时候我们不知道 V 中有没有大基数, 或者有时候我们知道 V 中不能有大基数, 或者是有时候 V 中的大基数太大了, 以至于对眼前的问题无法产生什么影响. 更具体一些, 我们有下面这个难题

- 我们想要有对象使得我们能像有大基数那样利用反射论证或者别的什么论证方法.
- 但是反射论证的强度来自于 ultrapower 嵌入的强度
- 我们希望我们嵌入的 ultrapower 是 well-founded 的
- 一旦我们的 ultrafilter 是 ω_1-complete 的, 那么所嵌入的模型就是 well-founded 的, 但是嵌入的 critical point 就是大基数了

Generic Ultrapower: the big picture

现在我们进入 generic ultrapower 的话题. 我们知道, 存在 $j : V \prec M$ 等价于存在一个可测基数. 这里的 j 是一个可定义真类. 特别地, j 是在 V(这里的 V 指的是目前所处的宇宙) 中定义的. 一旦有 j 满足这个定义, V 中就自动有了大基数.

问题是, 有时候我们不知道 V 中有没有大基数, 或者有时候我们知道 V 中不能有大基数, 或者是有时候 V 中的大基数太大了, 以至于对眼前的问题无法产生什么影响. 更具体一些, 我们有下面这个难题

- 我们想要有对象使得我们能像有大基数那样利用反射论证或者别的什么论证方法.
- 但是反射论证的强度来自于 ultrapower 嵌入的强度
- 我们希望我们嵌入的 ultrapower 是 well-founded 的
- 一旦我们的 ultrafilter 是 ω_1-complete 的, 那么所嵌入的模型就是 well-founded 的, 但是嵌入的 critical point 就是大基数了
- 相反地, 如果我们的 ultrafilter 不是 ω_1-complete 的, 那么我们嵌入的 ultrapower 也不会是 well-founded 的

Generic Ultrapower: the big picture

现在我们进入 generic ultrapower 的话题. 我们知道, 存在 $j : V \prec M$ 等价于存在一个可测基数. 这里的 j 是一个可定义真类. 特别地, j 是在 V(这里的 V 指的是目前所处的宇宙) 中定义的. 一旦有 j 满足这个定义, V 中就自动有了大基数.

问题是, 有时候我们不知道 V 中有没有大基数, 或者有时候我们知道 V 中不能有大基数, 或者是有时候 V 中的大基数太大了, 以至于对眼前的问题无法产生什么影响. 更具体一些, 我们有下面这个难题

- 我们想要有对象使得我们能像有大基数那样利用反射论证或者别的什么论证方法.
- 但是反射论证的强度来自于 ultrapower 嵌入的强度
- 我们希望我们嵌入的 ultrapower 是 well-founded 的
- 一旦我们的 ultrafilter 是 ω_1-complete 的, 那么所嵌入的模型就是 well-founded 的, 但是嵌入的 critical point 就是大基数了
- 相反地, 如果我们的 ultrafilter 不是 ω_1-complete 的, 那么我们嵌入的 ultrapower 也不会是 well-founded 的

Generic Ultrapower: the big picture

从现在开始, 为了跟力迫法符号更一致, 我们用 M 来表述目前我们所处的模型 (或者在讨论中一开始的模型), 在文献里, 我们也会叫 M 作 ground model.
一个想法: 我们是不是可以不管 M 中有没有我们想要的超滤, 转而考虑我们可不可能 "假装" 这样的一个超滤存在? 比较天真地, 我们想在 M 中找到一个偏序, 然后考虑 M 上的一个 generic filter, 接下来我们就想办法让这个 generic filter 在 $M[G]$ 变成一个 ultrafilter, 然后我们再在 $M[G]$ 中操作这个 ultrafilter 以及相应的 ultrapower.

当然, 这个想法是需要小心操作的. 首先, 我们不可能凭空在 $M[G]$ 中变出一个 normal measure 来. 因为这样我们就能证明类似 $\mathrm{Con}(\mathsf{ZFC}) \to \mathrm{Con}(\mathsf{ZFC} + LC)$ 这样子的命题.

在实际操作上, 我们将会控制使得我们的 generic normal measure 只测量 M 中的集合, 我们的 ultrapower 也只考虑 M 中的函数, 这样子我们相当于就在 $M[G]$ 中定义了一个 M 的 ultrapower 以及嵌入 $j : M \prec \mathrm{Ult}$. 特别的, 我们不会默认这样的 j 会蕴涵大基数存在, 因为在 $M[G]$ 的视角来看, j 并不是一个 $V \prec \mathrm{Ult}$ 的嵌入 ($M[G]$ 视角中的 V 就是 $M[G]$ 所有元素构成的真类).

一个不太恰当但是可以帮助理解的类比: 假设 V 中存在一个可测基数, 则存在一个 $j : L \prec L$ 的初等嵌入. 这个情况下我们并不会说 $L \models$ " 存在一个 Reinhardt 基数". 原因就是这个 j 是 V 中的产物. 这个类比不恰当的地方是因为如下事实: $0^{\#}$ 无法被集合力迫添加 (见 Jech exercise 18.2).

Metamathematical Subtlety

如果我们想在 $M[G]$ 中操作定义域为 M 的嵌入, 我们需要有什么方法在 $M[G]$ 中讨论 M 的元素. 然而至少表面上, 我们没有理由认为 M 是否在 $M[G]$ 中是可定义的真类. 我们有三个处理方法:

- 在语言中添加一个符号 $\check{M}$, 并且规定 $p \Vdash \dot{x} \in \check{M}$ 当且仅当 $\{q \mid (\exists x \in M)(q \Vdash \check{x} = \tau)\}$ 是在 p 下稠密的. 不难验证, 如果 G 是一个 generic, 那么 $\{val(\tau, G) \mid (\exists p \in G)(p \Vdash \tau \in \check{M})\} = \{val(\check{x}, G) \mid x \in M\} = M$
- 由于每一篇论证都只会用到有穷条公理, 而在基数算术上, 集合力迫只会影响到 initial segment of cardinals, 所以我们可以选取一个非常大的正则基数 θ(例如远远大于 $2^{2^{2^{|\mathbb{P}|}}}$), 然后再考虑 H_θ 的 ultrapower.

Metamathematical Subtlety

第三个方法，也是目前最干净的处理方法 (虽然在历史上最晚出现) 则是直接回答开头的问题: M 在 $M[G]$ 中是一个可定义的类.

定理 (Laver, Woodin)

令 $M \vDash ZFC$, $\mathbb{P} \in M$, $G \subseteq \mathbb{P}$ 为一个 *generic filter*, 令 $\gamma = |\mathbb{P}|^M$ 则在 $M[G]$ 中, M 是一个以 $(\mathcal{P}(\gamma))^M$ 为参数的可定义真类 *(definable from the parameter* $(\mathcal{P}(\gamma))^M$*)*

Hamkins 把这个定理叫做 “the first theorem of set-theoretic geology”. 该领域两个类似的 open questions:

- Laver-Woodin 定理，但是但把条件改成 $M \vDash \mathrm{ZF}$
- M 跟 $M[G]$ 中间的 symmetric extension 是否是可定义的

Metamathematical Subtlety

一个概念性的小问题: 如果 M 在 $M[G]$ 是可定义的, 那么我们也可以在 M 中定义 $1 \Vdash \varphi^M(\check{x})$ 这个关系, 然而这个关系等价于 $M \models \varphi[x]$. 所以我们在 M 中定义了 M 的真. 这与塔斯基不可定义定理矛盾. 这是怎么回事呢?

我们接下来对 ultrafilter 进行推广.

定义

令 M 为 ZFC 的传递模型, 令 κ 为 M 中的基数. 我们说 $D \subseteq \mathcal{P}^M(\kappa)$ 是一个 M-ultrafilter 当且仅当

- $\kappa \in D, \emptyset \notin D$
- $X \in D \wedge Y \in D \Rightarrow X \cap Y \in D$
- $(X \in D \wedge X \supseteq Y \in M) \Rightarrow Y \in D$
- 对于任意的 $X \subseteq \kappa$, 如果 $X \in M$, 那么 $X \in D$ 或者 $\kappa \setminus X \in D$
- D 是 κ-完备的, 当且仅当对于任意的 $\alpha < \kappa$, 如果 $\langle X_\xi : \xi < \alpha \rangle \in M$ 并且 $\{X_\xi : \xi < \alpha\} \subseteq D$, 那么 $\bigcap_{\xi<\alpha} X_\xi \in D$
- D 是 normal 的, 当且仅当对于任意的 $f \in M$, 如果 f 在 $X \in D$ 上 regressive, 那么 f 会在某个 $y \in D$ 上 constant

我们可以把之前的 ultrafilter 看作 V-ultrafilter. 一点观察: M-ultrafilter 不一定要在 M 里, 而且 κ-完备的 M-ultrafilter 不一定实际上 κ-完备.

如果 I 是 κ 上的 ideal (即 $\emptyset \in I, \kappa \notin I$, I 对有限并集封闭, I 对子集封闭), 我们称 $F = \{\kappa \setminus X \mid X \in I\}$ 为 I 的 dual filter.

我们说 I 是 normal 的, 当且仅当 I 的 dual filter 是 normal 的.

令 M 为 ZFC 的传递模型, κ 为 M 中的不可数正则基数, 令 I 为 M 中 κ 上的一个 ideal 我们定义以下偏序集 $\langle P, \leq \rangle$:

- $X \in P \Leftrightarrow (X \subseteq \kappa \wedge X \notin I)$
- $X \leq Y \Leftrightarrow X \subseteq Y$

令 $G \subseteq P$ 为 P 上 M-generic filter(即对 M 中任意稠密 $D \subseteq P$, $G \cap D \neq \emptyset$).

引理

1. G 是 κ 上的一个 *M-ultrafilter*, 并且 $G \supseteq F$, 其中 F 为 I 的 *dual filter*
2. 如果 I 在 M 中是 κ-完备的, 那么 G 就是一个 κ-完备的 *M-ultrafilter*.
3. 如果 I 是 *normal* 的, 那么 G 也是 *normal* 的.

G 是 κ 上的一个 M-ultrafilter, 并且 $G \supseteq F$, 其中 F 为 I 的 dual filter

证明.

G 是 M-filter: 留作练习.

G 是 M-ultrafilter: 如果 $X \subseteq \kappa$, 我们写 $\kappa \setminus X$ 为 X^c. 我们断言 $\{Y \in P \mid Y \subseteq X \vee Y \subseteq X^c\}$ 是稠密的: 如果 $Z \in P$, 那么 $Z \cap X$ 或 $Z \cap X^c$ 必须有一个在 P 内. 这是因为如果 $Z \cap X \notin P$ 以及 $Z \cap X^c \notin P$, 那么根据 P 的定义, $Z \cap X \in I$, $Z \cap X^c \in I$. 而由于 I 对并集闭包, $(Z \cap X) \cup (Z \cap X^c) = Z \in I$. 这与 $Z \in P$ 矛盾.

$G \supseteq F$: 如果 $X \in F$, 那么 $\{Y \in P \mid Y \subseteq X\}$ 在 P 中稠密: 考虑 $Z \in P$, 我们宣称 $(Z \cap X) \in P$. 如果 $(Z \cap X) \notin P$, 那么根据 P 的定义 $(Z \cap X) \in I$. 而因为 $X \in F$ 并且 F 是 I 的 dual filter, 我们有 $(Z \cap X) \cup X^c \in I$, 这蕴涵了 $Z \in I$, 与 $Z \in P$ 矛盾. □

如果 I 在 M 中是 κ-完备的, 那么 G 就是一个 κ-完备的 M-ultrafilter.

证明.

我们这里用到 κ-完备 ultrafilter 的一个等价定义: G 是 κ 上的 κ-完备的 ultrafilter 当且仅当对于任意的 $\gamma < \kappa$, 如果 $\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha \in G$, 那么存在一个 β 使得 $X_\beta \in G$.
现在假设 $\bigcup_{\alpha<\gamma} X_\alpha =$, 我们宣称 $\{Y \in P \mid (\exists\alpha) Y \subseteq X_\alpha\}$ 在 P 中稠密: 如果 $Z \in P$, 那么肯定存在 α 满足 $Z \cap X_\alpha \in P$. 假设不然: 那么 $Z \cap X_\alpha \in I$ 对于所有 $\alpha < \gamma$ 成立, 则 $\bigcup_{\alpha<\gamma}(Z \cap X_\alpha) = \kappa \in I$. 这与 ideal 的定义矛盾. $\square$

如果 I 是 normal 的, 那么 G 也是 normal 的

证明.

令 $X \in G, f \in M$. 假设 f 在 X 上是 regressive 的, 则取 F 中的任意元素 Y, 此时注意到 f 在 $X \cap Y$ 上也是 regressive 的. 如果 $(X \cap Y) \in F$, 那么根据 F 的 normality, 命题就得证了. 不然的话, 定义 $f' : Y \to \kappa$ 为

$$f'(\alpha) = \begin{cases} f(\alpha) & \text{如果} \alpha \in X \cap Y \\ \emptyset & \text{otherwise} \end{cases}$$

则 f' 在 Y 上 regressive, 此时根据 F 的 normality, 我们知道 f' 在某个 $Z \in F$ 上 constant. 但是 $f \restriction (X \cap Y \cap Z) = f' \restriction (X \cap Y \cap Z)$ □

令 κ 为不可数正则基数, 令 I 为 κ 上 κ-完备的 ideal, 并且对于所有 $\alpha \in \kappa$, 我们都有 $\{\alpha\} \in I$. 令 G, P 与前文定义相同. 那么根据上面的引理, 在 $M[G]$ 中, G 是一个 κ-完备的 nonprincipal M-ultrafilter. 所以在 $M[G]$ 中, 我们可以正常定义 $\mathrm{Ult}(M, G)$. 具体地:
我们考虑所有 $f : \kappa \to M$, 并且定义等价关系:
$f =^* g \Leftrightarrow \{i \in \kappa \mid f(i) = g(i)\} \in G$
定义元素关系为 $f \in^* g \Leftrightarrow \{i \in \kappa \mid f(i) \in g(i)\} \in G$.
$[f] = \{g \mid f =^* g \wedge (\forall h)(h =^* f \to \mathrm{rank}(g) \leq \mathrm{rank}(h))\}$.
令 $\mathrm{Ult}(M, G) = \{[f] \mid f : \kappa \to M\}$.

Łoś 定理也同样成立:

$$\mathrm{Ult}(M,G) \vDash \varphi[[f_1],...,[f_n]], \Leftrightarrow \{i \in \kappa \mid M \vDash \varphi[f_1(i),...,f_n(i)]\} \in G$$

所以我们可以在 $M[G]$ 中定义 $j : M \prec \mathrm{Ult}(M,G)$, $j(a) = [c_a] = [\lambda x.a]$

令 $N = \mathrm{Ult}(M, G)$. 如果 $x \in \mathrm{Ord}^N$, 那么我们写 $\mathrm{otp}^N(x) = \{y \in \mathrm{Ord}^N \mid y \in^N x\}$. 如果 $otp^N(x)$ 是一个序数 γ, 那我们就把 x 考虑作 γ.
N 中的序数 (在 $M[G]$ 看来) 不一定是 well-founded 的, 但是利用 G 的完备性, 我们可以和可测基数的情况一样证明 N 中序数的一些基本性质

引理

1. 如果 $\gamma < \kappa$, 那么 $j(\gamma) = \gamma$
2. $j(\kappa) \neq \kappa$
3. 如果 G 是 *normal* 的, 那么 $[\mathrm{id}] = \kappa$.

generic ultrapower 的应用

定理 (Silver)

令 κ 为 *cofinality* 为 ω_1 的 *singular cardinal.* 假设 $2^\lambda = \lambda^+$ 对所有 $\lambda < \kappa$ 成立, 则 $2^\kappa = \kappa^+$

证明.

在 M 中, 我们考虑 ω_1 上的 nonstationary ideal $I = X \subseteq \omega_1 \mid X$ is nonstationary$\}$. 令 P, G 与前文定义相同. 因为 $(|P| \leq 2^{\omega_1} < \kappa)^M$, 所以 $|P|$ 满足 κ-cc, 因此 κ 以上的基数在 $M[G]$ 中得以保留.

generic ultrapower 的应用

定理 (Silver)

令 κ 为 *cofinality* 为 ω_1 的 *singular cardinal*. 假设 $2^\lambda = \lambda^+$ 对所有 $\lambda < \kappa$ 成立, 则 $2^\kappa = \kappa^+$

证明.

在 M 中, 我们考虑 ω_1 上的 nonstationary ideal $I = X \subseteq \omega_1 \mid X$ is nonstationary$\}$. 令 P, G 与前文定义相同. 因为 $(|P| \leq 2^{\omega_1} < \kappa)^M$, 所以 $|P|$ 满足 κ-cc, 因此 κ 以上的基数在 $M[G]$ 中得以保留.

现在令工作环境为 $M[G]$. G 是 $(\omega_1)^M$ 上的一个 normal, ω_1-完备的 M-ultrafilter. 我们令 $N = \mathrm{Ult}(M, G)$, $j : M \prec N$

证明.

令 $\langle\kappa\rangle_\alpha \mid \alpha < \omega_1$ 为 M 中见证 κ 共尾性的一个序列. 这个序列可以看成一个定义在 ω_1 上的函数 e: $e(\alpha) = \kappa_\alpha$. 在无歧义的情况下, 我们也用 e 表示 $[e]$. 令 e^+ 为 e 在 N 中的后继基数.

对于 M 中的每一个 $X \subseteq \kappa$, 我们定义 $f_X : \omega_1^M \to M$ 为 $f_X(\alpha) = X \cap \kappa_\alpha$. $[f_X]$ 将会是 e 的子集. 如果 $X \neq Y$, 那么 $\{\alpha \in (\omega_1)^M \mid f_X(\alpha) = f_Y(\alpha)\}$ 是一个势小于 ω_1^M 的集合. 所以 $[f_X] \neq [f_Y]$. 所以 $|\mathcal{P}^M(\kappa)| \leq |\mathcal{P}^N(e)|$

证明.

令 $\langle\kappa\rangle_\alpha \mid \alpha < \omega_1$ 为 M 中见证 κ 共尾性的一个序列. 这个序列可以看成一个定义在 ω_1 上的函数 e: $e(\alpha) = \kappa_\alpha$. 在无歧义的情况下, 我们也用 e 表示 $[e]$. 令 e^+ 为 e 在 N 中的后继基数.

对于 M 中的每一个 $X \subseteq \kappa$, 我们定义 $f_X : \omega_1^M \to M$ 为 $f_X(\alpha) = X \cap \kappa_\alpha$. $[f_X]$ 将会是 e 的子集. 如果 $X \neq Y$, 那么 $\{\alpha \in (\omega_1)^M \mid f_X(\alpha) = f_Y(\alpha)\}$ 是一个势小于 ω_1^M 的集合. 所以 $[f_X] \neq [f_Y]$. 所以 $|\mathcal{P}^M(\kappa)| \leq |\mathcal{P}^N(e)|$

此时我们注意到, $\{\alpha \mid M \vDash 2^{e(\alpha)} = e(\alpha)^+\} \in G$, 所以根据 Łoś 定理, $N \vDash 2^e = e^+$. 所以在 N 中, 存在一个 $\mathcal{P}^N(e)$ 与 $ext(e^+) = \{x \in \mathrm{Ord}^N \mid x \in^N e^+\}$ 的双射. 所以在 $M[G]$ 中我们可以看到 $|\mathcal{P}^M(\kappa)| \leq |\mathcal{P}^N(e)| = |ext(e^+)|$

证明.

令 $\langle\kappa\rangle_\alpha \mid \alpha<\omega_1$ 为 M 中见证 κ 共尾性的一个序列. 这个序列可以看成一个定义在 ω_1 上的函数 e: $e(\alpha)=\kappa_\alpha$. 在无歧义的情况下, 我们也用 e 表示 $[e]$. 令 e^+ 为 e 在 N 中的后继基数.

对于 M 中的每一个 $X\subseteq\kappa$, 我们定义 $f_X:\omega_1^M\to M$ 为 $f_X(\alpha)=X\cap\kappa_\alpha$. $[f_X]$ 将会是 e 的子集. 如果 $X\neq Y$, 那么 $\{\alpha\in(\omega_1)^M \mid f_X(\alpha)=f_Y(\alpha)\}$ 是一个势小于 ω_1^M 的集合. 所以 $[f_X]\neq[f_Y]$. 所以 $|\mathcal{P}^M(\kappa)|\leq|\mathcal{P}^N(e)|$

此时我们注意到, $\{\alpha \mid M\vDash 2^{e(\alpha)}=e(\alpha)^+\}\in G$, 所以根据 Łoś 定理, $N\vDash 2^e=e^+$. 所以在 N 中, 存在一个 $\mathcal{P}^N(e)$ 与 $ext(e^+)=\{x\in\mathrm{Ord}^N \mid x\in^N e^+\}$ 的双射. 所以在 $M[G]$ 中我们可以看到 $|\mathcal{P}^M(\kappa)|\leq|\mathcal{P}^N(e)|=|ext(e^+)|$

我们现在宣称 $e=\sup\{j(\kappa_\gamma)\mid\gamma<\omega_1^M\}$. 这是因为如果 $[f]$ 是一个比 e 小的序数, 那么我们可以找到 $X\in G$ 满足 $\{\alpha\in Lim \mid f(\alpha)<\kappa_\alpha\}=X$. 而由于 α 是极限序数, 所以每个 $f(\alpha)$ 都会小于某个 $\kappa_{\gamma(\alpha)}$, 其中 $\gamma(\alpha)<\alpha$. 如果我们考虑函数 $(\alpha\mapsto\gamma(\alpha))$, 那么根据 G 的 normality, 则存在一个 γ 使得这个函数在 G 中某个集合上永远是 γ. 这说明了 $[f]<^N\kappa_\gamma$.

证明.

(在 $M[G]$ 中), 每个 $\gamma \in \omega_1^M$ 都满足 $|ext(j(\kappa_\gamma))| \leq |(\kappa_\gamma^{\omega_1})^M| < \kappa$. 而因为 e 是 $j(\kappa)$ 的最小上界, 所以 $|ext(e)| \leq \kappa$

证明.

(在 $M[G]$ 中), 每个 $\gamma \in \omega_1^M$ 都满足 $|ext(j(\kappa_\gamma))| \le |(\kappa_\gamma^{\omega_1})^M| < \kappa$. 而因为 e 是 $j(\kappa)$ 的最小上界, 所以 $|ext(e)| \le \kappa$

如果 $x <^N e^+$, 那么在 N 中我们可以找到 x 到 e 的双射, 所以 $|ext(x)| \le |ext(e)| < \kappa$. 我们推论 $|ext(e^+)|$ 是一个线序集, 且其中每个 initial segment 的大小都不大于 κ, 那么这意味着 $|ext(e^+)| \le \kappa^+$. 根据上一页的结果, 我们有 $|\mathcal{P}^M(\kappa)| \le \kappa^+$. 这是在 $M[G]$ 中得到的结果, 也就是说, 我们得到的是 $(|\mathcal{P}^M(\kappa)|)^{M[G]} \le (\kappa^+)^{M[G]}$. 但是由于 κ 之上的基数都不受力迫影响, 所以 $(|\mathcal{P}^M(\kappa)|)^M \le (\kappa^+)^M$ 也成立. 即 $(2^\kappa = \kappa^+)^M$.

□