# 无穷与悖论：语言和数学的界限

Jason Zesheng Chen

Department of Logic and Philosophy of Science, UC Irvine

*zeshengc@uci.edu*

# 调色盘小游戏

我们先从一个小游戏开始：想象你是一位艺术生，你的作业是设计一排调色盘，例如这样

# 调色盘小游戏

我们先从一个小游戏开始：想象你是一位艺术生，你的作业是设计一排调色盘，例如这样

老师唯一的要求就是：你的作业不能跟别人完全一样

# 拖延症的艺术生

优（拖）秀（延）如你，你聪明地想到了一个方法：你不需要费尽心思想出一个新的调色盘，你只需要等到ddl那天，看其他人都交了什么样的调色盘，然后随便排一个跟他们不一样的颜色不就行了？

优（拖）秀（延）如你，你聪明地想到了一个方法：你不需要费尽心思想出一个新的调色盘，你只需要等到ddl那天，看其他人都交了什么样的调色盘，然后随便排一个跟他们不一样的颜色不就行了？

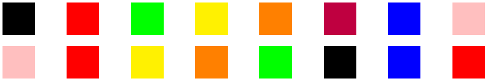
同学1： 

# 拖延症的艺术生

优（拖）秀（延）如你，你聪明地想到了一个方法：你不需要费尽心思想出一个新的调色盘，你只需要等到ddl那天，看其他人都交了什么样的调色盘，然后随便排一个跟他们不一样的颜色不就行了？

同学1：

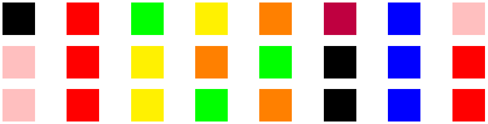
同学2：



# 拖延症的艺术生

优（拖）秀（延）如你，你聪明地想到了一个方法：你不需要费尽心思想出一个新的调色盘，你只需要等到ddl那天，看其他人都交了什么样的调色盘，然后随便排一个跟他们不一样的颜色不就行了？

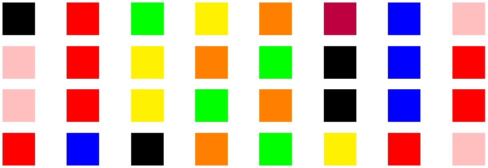
同学1:
同学2:
同学3:



# 拖延症的艺术生

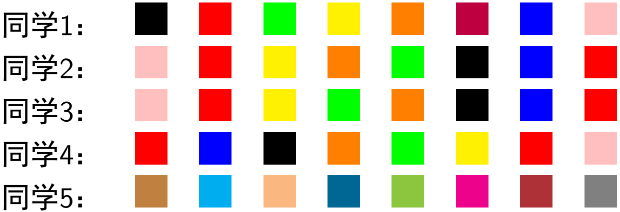
优（拖）秀（延）如你，你聪明地想到了一个方法：你不需要费尽心思想出一个新的调色盘，你只需要等到ddl那天，看其他人都交了什么样的调色盘，然后随便排一个跟他们不一样的颜色不就行了？

同学1：
同学2：
同学3：
同学4：



# 拖延症的艺术生

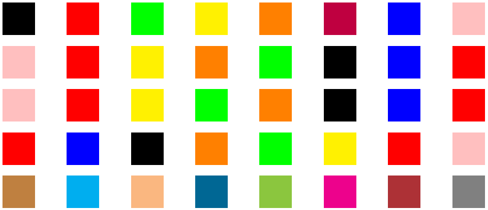
优（拖）秀（延）如你，你聪明地想到了一个方法：你不需要费尽心思想出一个新的调色盘，你只需要等到ddl那天，看其他人都交了什么样的调色盘，然后随便排一个跟他们不一样的颜色不就行了？



# 拖延症的艺术生

优（拖）秀（延）如你，你聪明地想到了一个方法：你不需要费尽心思想出一个新的调色盘，你只需要等到ddl那天，看其他人都交了什么样的调色盘，然后随便排一个跟他们不一样的颜色不就行了？

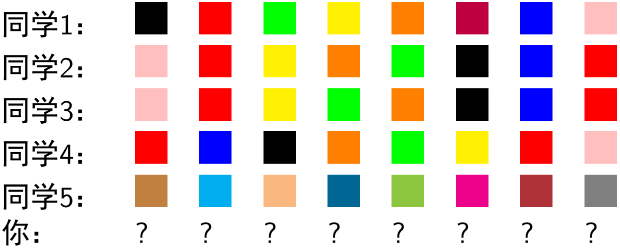
同学1:
同学2:
同学3:
同学4:
同学5:



你: ? ? ? ? ? ? ? ?

# 再给力一些

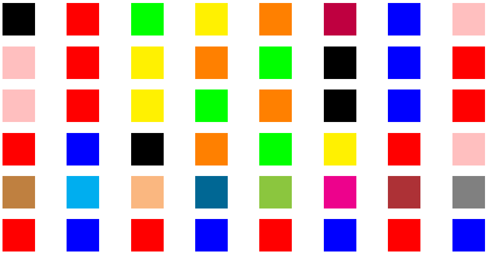
聪明如你，你机智地观察到：你甚至不需要花时间去买颜料和调颜色，因为你只需要两个颜色就可以完成这项作业！



# 再给力一些

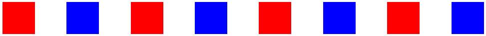
聪明如你，你机智地观察到：你甚至不需要花时间去买颜料和调颜色，因为你只需要两个颜色就可以完成这项作业!

同学1:
同学2:
同学3:
同学4:
同学5:
你:



# 再再给力一些

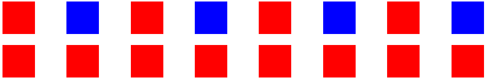
当然，你机智，你的同学也机智，大家都发现只用两个颜色就可以完成这项作业

同学1： 

# 再再给力一些

当然，你机智，你的同学也机智，大家都发现只用两个颜色就可以完成这项作业

同学1:
同学2:



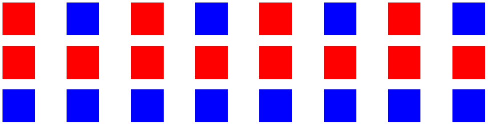
# 再再给力一些

当然，你机智，你的同学也机智，大家都发现只用两个颜色就可以完成这项作业

同学1:

同学2:

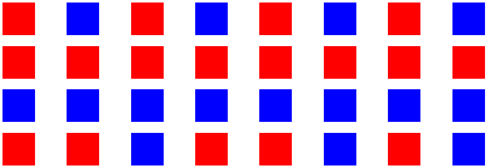
同学3:



# 再再给力一些

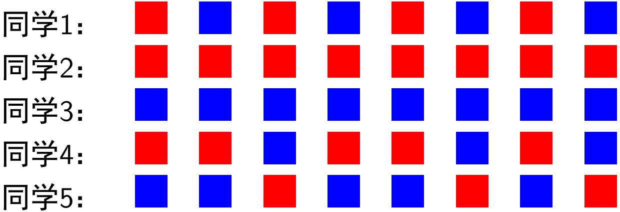
当然，你机智，你的同学也机智，大家都发现只用两个颜色就可以完成这项作业

同学1：
同学2：
同学3：
同学4：



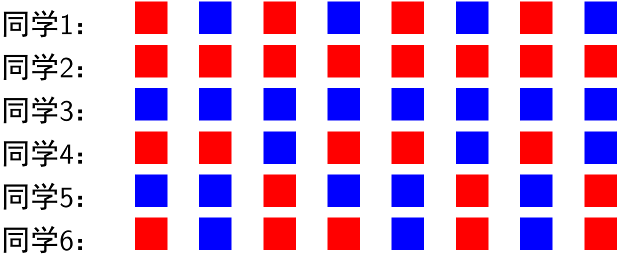
# 再再给力一些

当然，你机智，你的同学也机智，大家都发现只用两个颜色就可以完成这项作业



# 再再给力一些

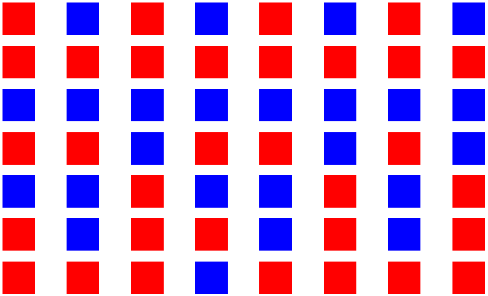
当然，你机智，你的同学也机智，大家都发现只用两个颜色就可以完成这项作业



# 再再给力一些

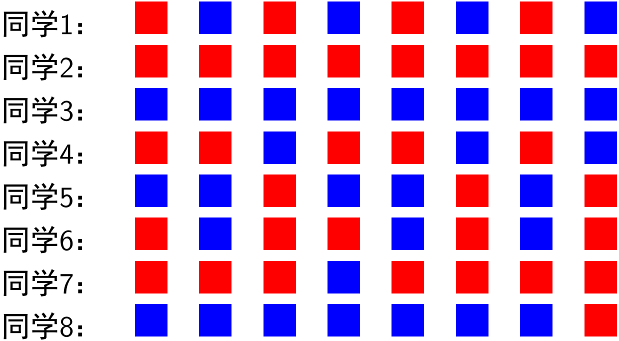
当然，你机智，你的同学也机智，大家都发现只用两个颜色就可以完成这项作业

同学1:
同学2:
同学3:
同学4:
同学5:
同学6:
同学7:



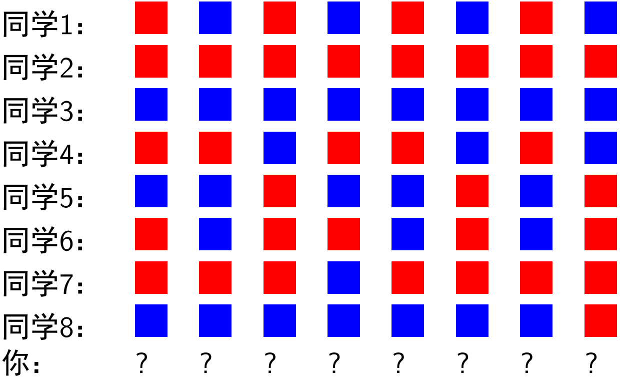
# 再再给力一些

当然，你机智，你的同学也机智，大家都发现只用两个颜色就可以完成这项作业



# 再再给力一些

当然，你机智，你的同学也机智，大家都发现只用两个颜色就可以完成这项作业

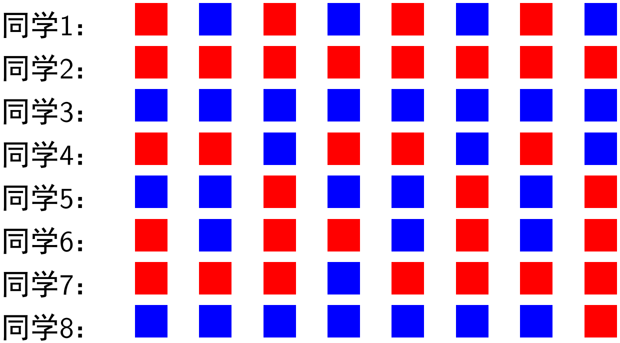


# 小挑战

显然，在这个情况下，要交出合格的作业还挺不容易的。你能找到一个简单高效的方法，让你的作业不会跟任何人的作业完全一样吗？

# 小挑战

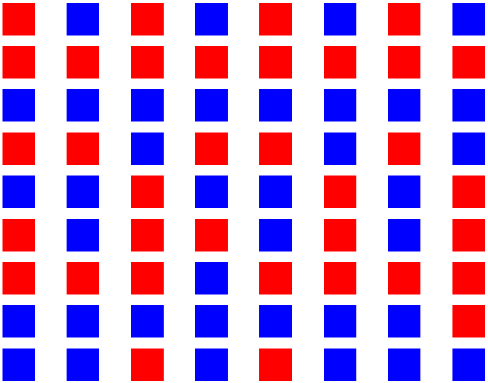
显然，在这个情况下，要交出合格的作业还挺不容易的。你能找到一个简单高效的方法，让你的作业不会跟任何人的作业完全一样吗？



# 小挑战

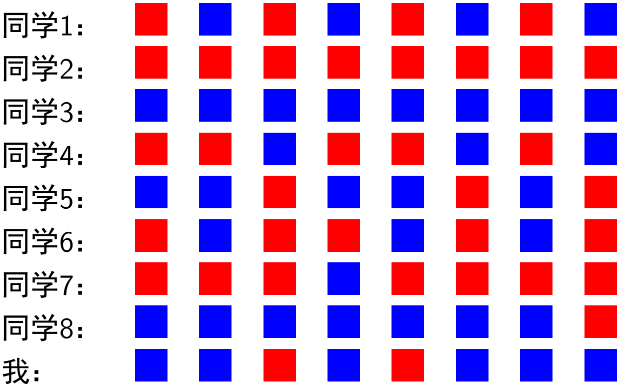
显然，在这个情况下，要交出合格的作业还挺不容易的。你能找到一个简单高效的方法，让你的作业不会跟任何人的作业完全一样吗？

同学1：
同学2：
同学3：
同学4：
同学5：
同学6：
同学7：
同学8：
我：



# 小挑战

显然，在这个情况下，要交出合格的作业还挺不容易的。你能找到一个简单高效的方法，让你的作业不会跟任何人的作业完全一样吗？



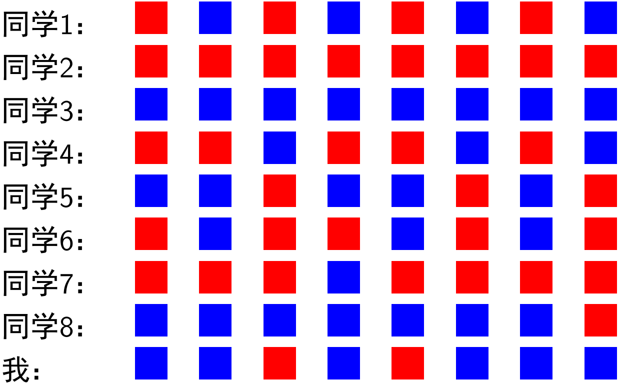

我用了什么方法？

# 内容一览

1. 揭秘
   - 数学证明入门之：反证法（归谬法）
   - 对解法进行抽象
2. 应用1：一些无穷比另一些无穷还要大（康托定理）
3. 应用2：语言的界限（塔斯基不可定义定理）
4. 应用3：数学的界限（哥德尔不完备定理）
5. 应用4：计算机的界限（图灵停机问题）

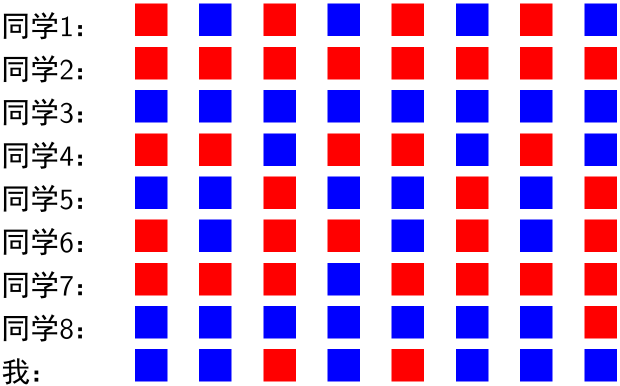
# 我的方法

一个提示性的观察：我的作业在哪一格跟哪一位同学的作业不一样？



# 我的方法

一个提示性的观察：我的作业在哪一格跟哪一位同学的作业不一样？




解答：我只需要在第n个位置，填上跟第n位同学的第n格颜色相反的颜色即可（!）

# 答案解析

为什么这个方案能确保我的作业跟大家的都不一样？

# 答案解析

为什么这个方案能确保我的作业跟大家的都不一样?

- 我的第1个颜色跟第1位同学的第1个颜色不一样

# 答案解析

为什么这个方案能确保我的作业跟大家的都不一样？

- 我的第1个颜色跟第1位同学的第1个颜色不一样
- 我的第2个颜色跟第2位同学的第2个颜色不一样

# 答案解析

为什么这个方案能确保我的作业跟大家的都不一样？

- 我的第1个颜色跟第1位同学的第1个颜色不一样
- 我的第2个颜色跟第2位同学的第2个颜色不一样
- 我的第3个颜色跟第3位同学的第3个颜色不一样

# 答案解析

为什么这个方案能确保我的作业跟大家的都不一样？

- 我的第1个颜色跟第1位同学的第1个颜色不一样
- 我的第2个颜色跟第2位同学的第2个颜色不一样
- 我的第3个颜色跟第3位同学的第3个颜色不一样
- ……

# 答案解析

为什么这个方案能确保我的作业跟大家的都不一样?

- 我的第1个颜色跟第1位同学的第1个颜色不一样
- 我的第2个颜色跟第2位同学的第2个颜色不一样
- 我的第3个颜色跟第3位同学的第3个颜色不一样
- ……

# 答案解析

为什么这个方案能确保我的作业跟大家的都不一样？

- 我的第1个颜色跟第1位同学的第1个颜色不一样
- 我的第2个颜色跟第2位同学的第2个颜色不一样
- 我的第3个颜色跟第3位同学的第3个颜色不一样
- ……

要严格证明我的方案不正确，直接找出某一个跟我作业相同的人即可。要严格证明我的方案正确，我们需要证明不存在任何一个跟我作业相同的同学。接下来我们将介绍一个证明某某东西不存在的方法：反证法

# 一条逻辑法则

要证明一个东西不存在，我们可以用到逻辑学上的一条原则:

# 一条逻辑法则

要证明一个东西不存在，我们可以用到逻辑学上的一条原则:

**反证法/归谬法 (proof by contradiction, reductio ad absurdum)**

如果我们从一个假设出发，根据我们已有的信息进行逻辑推理，最后达到了一个自相矛盾的结论，那么我们就可以认为我们一开始的假设是错误的。

**反证法图示**

要推翻的假设 $\xrightarrow[\text{逻辑推理}]{\text{已有信息}}$ 自相矛盾的结论 $\rightarrow$ 成功推翻原假设

# 例子1

证明: 不存在最大的自然数

# 例子1

证明: 不存在最大的自然数

1. 假设存在最大的自然数（这是我们最终要推翻的假设）。我们把它写作$n$
2. 根据小学数学，我们知道$n+1$大于$n$

# 例子1

证明: 不存在最大的自然数

1. 假设存在最大的自然数（这是我们最终要推翻的假设）。我们把它写作$n$
2. 根据小学数学, 我们知道$n+1$大于$n$
3. 我们也知道，如果$n$是自然数，那么$n+1$也是自然数

# 例子1

证明: 不存在最大的自然数

1. 假设存在最大的自然数（这是我们最终要推翻的假设）。我们把它写作$n$
2. 根据小学数学, 我们知道$n+1$大于$n$
3. 我们也知道，如果$n$是自然数，那么$n+1$也是自然数
4. 因为$n+1$是自然数，而$n$又是最大的自然数，所以$n+1$不大于$n$

# 例子1

证明：不存在最大的自然数

1. 假设存在最大的自然数（这是我们最终要推翻的假设）。我们把它写作$n$
2. 根据小学数学，我们知道$n+1$大于$n$
3. 我们也知道，如果$n$是自然数，那么$n+1$也是自然数
4. 因为$n+1$是自然数，而$n$又是最大的自然数，所以$n+1$不大于$n$
5. 通过2和4，我们得到了一个自相矛盾的结论，所以我们一开始的假设是错误的。也就是说不存在最大的自然数

# 例子2

证明: 不存在最小的有理数

# 例子2

证明: 不存在最小的有理数

1. 假设存在最小的正有理数（这是我们最终要推翻的假设）。我们可以把它写作$\frac{p}{q}$，其中$p, q$都是正数
2. 根据小学数学，由于$\frac{p}{q}$是正有理数，那么$\frac{p}{2q}$也是正有理数

# 例子2

证明: 不存在最小的有理数

1. 假设存在最小的正有理数（这是我们最终要推翻的假设）。我们可以把它写作$\frac{p}{q}$，其中$p, q$都是正数
2. 根据小学数学, 由于$\frac{p}{q}$是正有理数，那么$\frac{p}{2q}$也是正有理数
3. 我们也知道，$\frac{p}{2q} < \frac{p}{q}$

# 例子2

证明：不存在最小的有理数

1. 假设存在最小的正有理数（这是我们最终要推翻的假设）。我们可以把它写作$\frac{p}{q}$，其中$p, q$都是正数
2. 根据小学数学，由于$\frac{p}{q}$是正有理数，那么$\frac{p}{2q}$也是正有理数
3. 我们也知道，$\frac{p}{2q} < \frac{p}{q}$
4. 然而$\frac{p}{q}$已经是最小的正有理数了，所以比它还小的正数就只能是无理数，所以根据3，$\frac{p}{2q}$是无理数

# 例子2

证明: 不存在最小的有理数

1. 假设存在最小的正有理数（这是我们最终要推翻的假设）。我们可以把它写作$\frac{p}{q}$，其中$p, q$都是正数
2. 根据小学数学, 由于$\frac{p}{q}$是正有理数，那么$\frac{p}{2q}$也是正有理数
3. 我们也知道，$\frac{p}{2q} < \frac{p}{q}$
4. 然而$\frac{p}{q}$已经是最小的正有理数了，所以比它还小的正数就只能是无理数，所以根据3，$\frac{p}{2q}$是无理数
5. 通过2和4，我们得到了一个自相矛盾的结论, 所以我们一开始的假设是错误的。也就是说不存在最小的正有理数

# 证明我的解法的正确性

证明：（在我是最后一个交作业的情况下）不存在跟我的作业完全一样的同学

# 证明我的解法的正确性

证明：（在我是最后一个交作业的情况下）不存在跟我的作业完全一样的同学

1. 假设第$n$号同学跟我的作业完全一样

# 证明我的解法的正确性

证明：（在我是最后一个交作业的情况下）不存在跟我的作业完全一样的同学

1. 假设第$n$号同学跟我的作业完全一样
2. 那么第$n$号同学的第$n$格颜色也应该我的第$n$格颜色完全一样

# 证明我的解法的正确性

证明：（在我是最后一个交作业的情况下）不存在跟我的作业完全一样的同学

1. 假设第$n$号同学跟我的作业完全一样
2. 那么第$n$号同学的第$n$格颜色也应该我的第$n$格颜色完全一样
3. 根据我的解法设计，我的第$n$格颜色是跟第$n$号同学的第$n$格颜色相反的颜色

# 证明我的解法的正确性

证明：（在我是最后一个交作业的情况下）不存在跟我的作业完全一样的同学

1. 假设第$n$号同学跟我的作业完全一样
2. 那么第$n$号同学的第$n$格颜色也应该我的第$n$格颜色完全一样
3. 根据我的解法设计，我的第$n$格颜色是跟第$n$号同学的第$n$格颜色相反的颜色
4. 2和3构成了自相矛盾的结论，所以我们一开始的假设是错误的。也就是说不存在跟我的作业完全一样的同学

# 对解法进行抽象

**接下来**

我们将把这个颜色选取方案从具体的调色盘问题中解放出来，让它成为一种在很多领域都能应用通用方法。帮助我们做到这点的是数学/哲学中一个常见的操作：抽象化

**康托(Georg Cantor, 1845-1918)**

数学的本质在于其自由

**庞加莱(Henri Poincaré, 1854-1912)**

数学是为不同事物取相同名字的艺术

### 康托(Georg Cantor, 1845-1918)

数学的本质在于其自由

### 庞加莱(Henri Poincaré, 1854-1912)

数学是为不同事物取相同名字的艺术

### 抽象化方法

为了摆脱具体词义的束缚，我们需要反思哪些概念和前提在论证中起到了关键作用。我们保留那些关键的概念与前提。那些不关键的，我们要么抛弃掉要么拿符号代替，这使得我们可以不受限地将它们自由理解为任何东西

## 抽象化方法

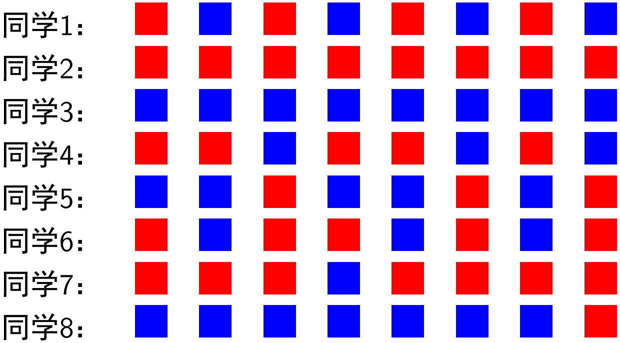
为了摆脱具体词义的束缚，我们需要反思哪些概念和前提在论证中起到了关键作用。我们保留那些关键的概念与前提。那些不关键的，我们要么抛弃掉要么拿符号代替，这使得我们可以不受限地将它们自由理解为任何东西

## 当被拿破仑问到为什么自己的天体力学教材中没有出现上帝时，拉普拉斯回答道：

陛下，我不需要那个假设

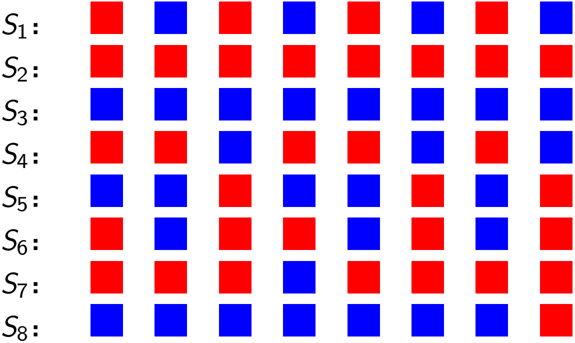
# 抽象化方法

第一步：我们不再被限制于“同学”这一概念（因为在我们的论证中，“学生、学校、同班”等概念并没有起任何作用）



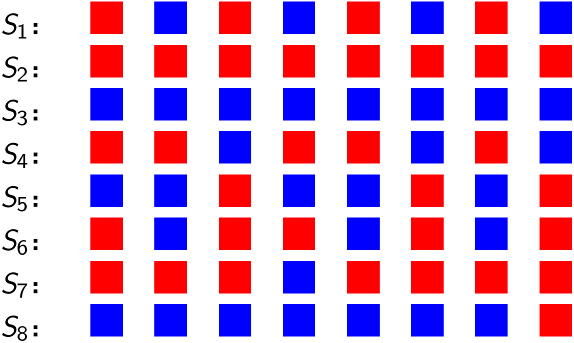
# 抽象化方法

第一步：我们不再被限制于“同学”这一概念（因为在我们的论证中，“学生、学校、同班”等概念并没有起任何作用）



# 抽象化方法

第二步：同样地，我们不再受限于“颜色”这一概念（因为在我们的论证中“红色、蓝色”并没有起任何作用）



# 抽象化方法

第二步：同样地，我们不再受限于“颜色”这一概念（因为在我们的论证中“红色、蓝色”并没有起任何作用）

$$
\begin{array}{lllllllll}
S_1: & S_1(1) & S_1(2) & S_1(3) & S_1(4) & S_1(5) & S_1(6) & S_1(7) & S_1(8) \\
S_2: & S_2(1) & S_2(2) & S_2(3) & S_2(4) & S_2(5) & S_2(6) & S_2(7) & S_2(8) \\
S_3: & S_3(1) & S_3(2) & S_3(3) & S_3(4) & S_3(5) & S_3(6) & S_3(7) & S_3(8) \\
S_4: & S_4(1) & S_4(2) & S_4(3) & S_4(4) & S_4(5) & S_4(6) & S_4(7) & S_4(8) \\
S_5: & S_5(1) & S_5(2) & S_5(3) & S_5(4) & S_5(5) & S_5(6) & S_5(7) & S_5(8) \\
S_6: & S_6(1) & S_6(2) & S_6(3) & S_6(4) & S_6(5) & S_6(6) & S_6(7) & S_6(8) \\
S_7: & S_7(1) & S_7(2) & S_7(3) & S_7(4) & S_7(5) & S_7(6) & S_7(7) & S_7(8) \\
S_8: & S_8(1) & S_8(2) & S_8(3) & S_8(4) & S_8(5) & S_8(6) & S_8(7) & S_8(8)
\end{array}
$$

# 抽象化方法

第二步：同样地，我们不再受限于“颜色”这一概念（因为在我们的论证中“红色、蓝色”并没有起任何作用）

$$
\begin{array}{lllllllll}
S_1: & S_1(1) & S_1(2) & S_1(3) & S_1(4) & S_1(5) & S_1(6) & S_1(7) & S_1(8) \\
S_2: & S_2(1) & S_2(2) & S_2(3) & S_2(4) & S_2(5) & S_2(6) & S_2(7) & S_2(8) \\
S_3: & S_3(1) & S_3(2) & S_3(3) & S_3(4) & S_3(5) & S_3(6) & S_3(7) & S_3(8) \\
S_4: & S_4(1) & S_4(2) & S_4(3) & S_4(4) & S_4(5) & S_4(6) & S_4(7) & S_4(8) \\
S_5: & S_5(1) & S_5(2) & S_5(3) & S_5(4) & S_5(5) & S_5(6) & S_5(7) & S_5(8) \\
S_6: & S_6(1) & S_6(2) & S_6(3) & S_6(4) & S_6(5) & S_6(6) & S_6(7) & S_6(8) \\
S_7: & S_7(1) & S_7(2) & S_7(3) & S_7(4) & S_7(5) & S_7(6) & S_7(7) & S_7(8) \\
S_8: & S_8(1) & S_8(2) & S_8(3) & S_8(4) & S_8(5) & S_8(6) & S_8(7) & S_8(8)
\end{array}
$$

调色盘作业问题此时就成了这个抽象设定的一个具体情况：将$S_n$理解为第$n$个同学的作业，将$S_n(i)$理解为第$n$个人的第$i$格颜色

# 抽象化方法

第三步：为了让我们的解法更加通用，我们还需要更激进地抛弃掉一个调色盘作业问题中没有起到作用的隐含前提：学生和调色盘格数的数量是有限的

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | $\dots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | $S_1(1)$ | $S_1(2)$ | $S_1(3)$ | $S_1(4)$ | $S_1(5)$ | $S_1(6)$ | $S_1(7)$ | $S_1(8)$ | |
| $S_2$ | $S_2(1)$ | $S_2(2)$ | $S_2(3)$ | $S_2(4)$ | $S_2(5)$ | $S_2(6)$ | $S_2(7)$ | $S_2(8)$ | |
| $S_3$ | $S_3(1)$ | $S_3(2)$ | $S_3(3)$ | $S_3(4)$ | $S_3(5)$ | $S_3(6)$ | $S_3(7)$ | $S_3(8)$ | |
| $S_4$ | $S_4(1)$ | $S_4(2)$ | $S_4(3)$ | $S_4(4)$ | $S_4(5)$ | $S_4(6)$ | $S_4(7)$ | $S_4(8)$ | |
| $S_5$ | $S_5(1)$ | $S_5(2)$ | $S_5(3)$ | $S_5(4)$ | $S_5(5)$ | $S_5(6)$ | $S_5(7)$ | $S_5(8)$ | |
| $S_6$ | $S_6(1)$ | $S_6(2)$ | $S_6(3)$ | $S_6(4)$ | $S_6(5)$ | $S_6(6)$ | $S_6(7)$ | $S_6(8)$ | |
| $S_7$ | $S_7(1)$ | $S_7(2)$ | $S_7(3)$ | $S_7(4)$ | $S_7(5)$ | $S_7(6)$ | $S_7(7)$ | $S_7(8)$ | |
| $S_8$ | $S_8(1)$ | $S_8(2)$ | $S_8(3)$ | $S_8(4)$ | $S_8(5)$ | $S_8(6)$ | $S_8(7)$ | $S_8(8)$ | |
| $\vdots$ | $\ddots$ | | | | | $\vdots$ | | | |
| $S_n$ | $S_n(1)$ | $S_n(2)$ | $S_n(3)$ | $S_n(4)$ | $S_n(5)$ | $S_n(6)$ | $S_n(7)$ | $S_n(8)$ | |
| $\vdots$ | $\ddots$ | | | | | $\vdots$ | | | |

# 抽象化方法

第四步：提炼出我们解法中起到关键作用的成分："在第$n$个位置，填上跟第$n$位同学的第$n$格颜色相反的颜色"

# 抽象化方法

第四步：提炼出我们解法中起到关键作用的成分：“在第$n$个位置，填上跟第$n$位同学的第$n$格颜色相反的颜色”

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | $S_1(1)$ | $S_1(2)$ | $S_1(3)$ | $S_1(4)$ | $S_1(5)$ | $S_1(6)$ | $S_1(7)$ | $S_1(8)$ | |
| $S_2$ | $S_2(1)$ | $S_2(2)$ | $S_2(3)$ | $S_2(4)$ | $S_2(5)$ | $S_2(6)$ | $S_2(7)$ | $S_2(8)$ | |
| $S_3$ | $S_3(1)$ | $S_3(2)$ | $S_3(3)$ | $S_3(4)$ | $S_3(5)$ | $S_3(6)$ | $S_3(7)$ | $S_3(8)$ | |
| $S_4$ | $S_4(1)$ | $S_4(2)$ | $S_4(3)$ | $S_4(4)$ | $S_4(5)$ | $S_4(6)$ | $S_4(7)$ | $S_4(8)$ | |
| $S_5$ | $S_5(1)$ | $S_5(2)$ | $S_5(3)$ | $S_5(4)$ | $S_5(5)$ | $S_5(6)$ | $S_5(7)$ | $S_5(8)$ | |
| $S_6$ | $S_6(1)$ | $S_6(2)$ | $S_6(3)$ | $S_6(4)$ | $S_6(5)$ | $S_6(6)$ | $S_6(7)$ | $S_6(8)$ | |
| $S_7$ | $S_7(1)$ | $S_7(2)$ | $S_7(3)$ | $S_7(4)$ | $S_7(5)$ | $S_7(6)$ | $S_7(7)$ | $S_7(8)$ | |
| $S_8$ | $S_8(1)$ | $S_8(2)$ | $S_8(3)$ | $S_8(4)$ | $S_8(5)$ | $S_8(6)$ | $S_8(7)$ | $S_8(8)$ | |
| $\vdots$ | $\ddots$ | | | | | $\vdots$ | | | |
| $S_n$ | $S_n(1)$ | $S_n(2)$ | $S_n(3)$ | $S_n(4)$ | $S_n(5)$ | $S_n(6)$ | $S_n(7)$ | $S_n(8)$ | ... $S_n(n)$... |
| $\vdots$ | $\ddots$ | | | | | $\vdots$ | | | |

# 抽象化方法

第四步：提炼出我们解法中起到关键作用的成分：“在第$n$个位置，填上跟第$n$位同学的第$n$格颜色相反的颜色”

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | $\dots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | $S_1(1)$ | $S_1(2)$ | $S_1(3)$ | $S_1(4)$ | $S_1(5)$ | $S_1(6)$ | $S_1(7)$ | $S_1(8)$ | |
| $S_2$ | $S_2(1)$ | $S_2(2)$ | $S_2(3)$ | $S_2(4)$ | $S_2(5)$ | $S_2(6)$ | $S_2(7)$ | $S_2(8)$ | |
| $S_3$ | $S_3(1)$ | $S_3(2)$ | $S_3(3)$ | $S_3(4)$ | $S_3(5)$ | $S_3(6)$ | $S_3(7)$ | $S_3(8)$ | |
| $S_4$ | $S_4(1)$ | $S_4(2)$ | $S_4(3)$ | $S_4(4)$ | $S_4(5)$ | $S_4(6)$ | $S_4(7)$ | $S_4(8)$ | |
| $S_5$ | $S_5(1)$ | $S_5(2)$ | $S_5(3)$ | $S_5(4)$ | $S_5(5)$ | $S_5(6)$ | $S_5(7)$ | $S_5(8)$ | |
| $S_6$ | $S_6(1)$ | $S_6(2)$ | $S_6(3)$ | $S_6(4)$ | $S_6(5)$ | $S_6(6)$ | $S_6(7)$ | $S_6(8)$ | |
| $S_7$ | $S_7(1)$ | $S_7(2)$ | $S_7(3)$ | $S_7(4)$ | $S_7(5)$ | $S_7(6)$ | $S_7(7)$ | $S_7(8)$ | |
| $S_8$ | $S_8(1)$ | $S_8(2)$ | $S_8(3)$ | $S_8(4)$ | $S_8(5)$ | $S_8(6)$ | $S_8(7)$ | $S_8(8)$ | |
| $\vdots$ | $\ddots$ | | | | | $\vdots$ | | | |
| $S_n$ | $S_n(1)$ | $S_n(2)$ | $S_n(3)$ | $S_n(4)$ | $S_n(5)$ | $S_n(6)$ | $S_n(7)$ | $S_n(8)$ | $\dots$ $S_n(n)\dots$ |
| $\vdots$ | $\ddots$ | | | | | $\vdots$ | | | |

只要我们规定第$n$项跟$S_n(n)$不同，那么我们就能成功地避开上面表格中的任何一项$S_n$，哪怕$S_n$有无穷多项 (!)

只要我们规定第$n$项跟$S_n(n)$不同，那么我们就能成功地避开表格中的任何一项$S_n$，哪怕$S_n$有无穷多项 (!)

我们把这种构造方法称为对角线法。接下来我们将看到对角线法的应用有多广泛

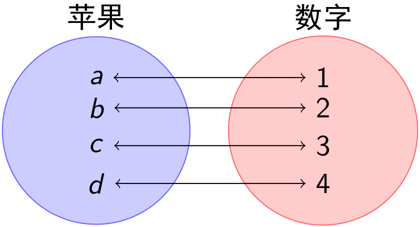
# 应用1：一些无穷比另一些无穷还要大（康托定理）

- 我们是如何数数的？给定两个集合，我们应该如何比较他们的大小？

# 应用1：一些无穷比另一些无穷还要大（康托定理）

- 我们是如何数数的？给定两个集合，我们应该如何比较他们的大小？
- 我们可以思考一下我们怎么数手里的苹果

# 数苹果



# 一个简单的问题

- 我们是如何数数的？给定两个集合，我们应该如何比较他们的大小？
- 我们可以思考一下我们怎么数手里的苹果
- 我们对“数量”，“大小”，“多少”的概念正是从这种一一对应中来的。

# 定义

为了严格探讨这些概念，我们现在定义什么叫"一样多"

**定义**

"两样东西一样多"，或"两个集合一样大"，意思是我们有办法将这两个集合的东西一一对应起来。

# 定义

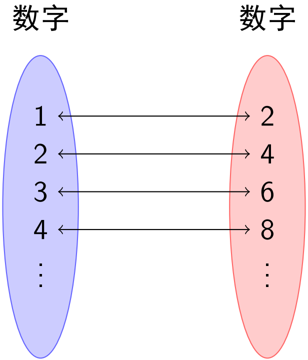
为了严格探讨这些概念，我们现在定义什么叫“一样多”

**定义**

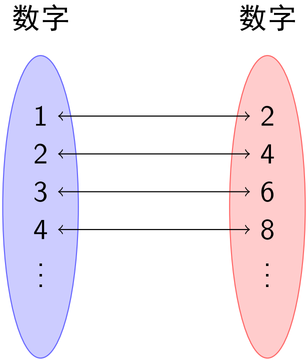
“两样东西一样多”，或“两个集合一样大”，意思是我们有办法将这两个集合的东西一一对应起来。

上面的定义中，我们并没有将“集合”限制为“有限集合”。这意味着我们可以将这个定义应用在比较无限集合的大小上。

# 自然数跟偶数一样多

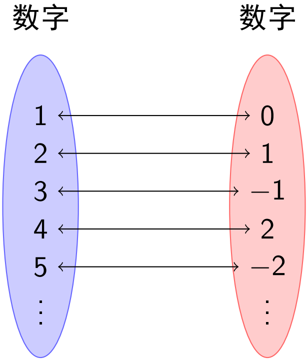


# 自然数跟偶数一样多

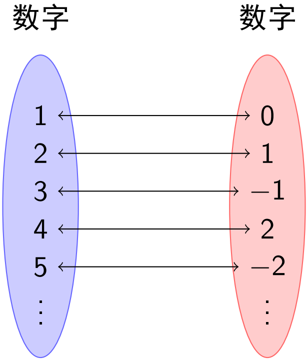



$$x \iff 2x$$

# 自然数跟整数一样多



# 自然数跟整数一样多




$$\text{偶数x:}\ x \iff \frac{x}{2}$$

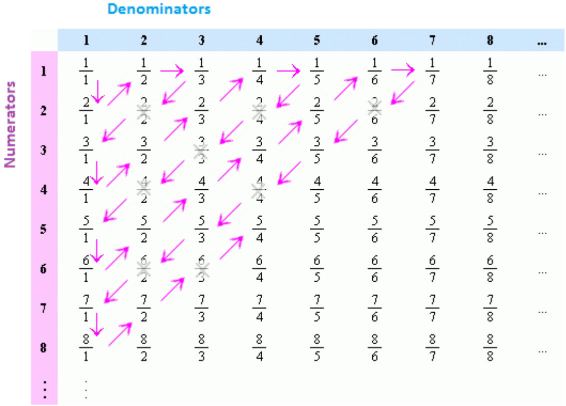
$$\text{奇数x:}\ x \iff \frac{-(x-1)}{2}$$

# 自然数跟(正)有理数一样多

Denominators

| Numerators | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{8}$ | ... |
| 2 | $\frac{2}{1}$ | $\cancel{\frac{2}{2}}$ | $\frac{2}{3}$ | $\cancel{\frac{2}{4}}$ | $\frac{2}{5}$ | $\cancel{\frac{2}{6}}$ | $\frac{2}{7}$ | $\frac{2}{8}$ | ... |
| 3 | $\frac{3}{1}$ | $\frac{3}{2}$ | $\cancel{\frac{3}{3}}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{3}{6}$ | $\frac{3}{7}$ | $\frac{3}{8}$ | ... |
| 4 | $\frac{4}{1}$ | $\cancel{\frac{4}{2}}$ | $\frac{4}{3}$ | $\cancel{\frac{4}{4}}$ | $\frac{4}{5}$ | $\frac{4}{6}$ | $\frac{4}{7}$ | $\frac{4}{8}$ | ... |
| 5 | $\frac{5}{1}$ | $\frac{5}{2}$ | $\frac{5}{3}$ | $\frac{5}{4}$ | $\frac{5}{5}$ | $\frac{5}{6}$ | $\frac{5}{7}$ | $\frac{5}{8}$ | ... |
| 6 | $\frac{6}{1}$ | $\cancel{\frac{6}{2}}$ | $\cancel{\frac{6}{3}}$ | $\frac{6}{4}$ | $\frac{6}{5}$ | $\frac{6}{6}$ | $\frac{6}{7}$ | $\frac{6}{8}$ | ... |
| 7 | $\frac{7}{1}$ | $\frac{7}{2}$ | $\frac{7}{3}$ | $\frac{7}{4}$ | $\frac{7}{5}$ | $\frac{7}{6}$ | $\frac{7}{7}$ | $\frac{7}{8}$ | ... |
| 8 | $\frac{8}{1}$ | $\frac{8}{2}$ | $\frac{8}{3}$ | $\frac{8}{4}$ | $\frac{8}{5}$ | $\frac{8}{6}$ | $\frac{8}{7}$ | $\frac{8}{8}$ | ... |
| ⋮ | ⋮ | | | | | | | | |

# 自然数跟(正)有理数一样多




具体对应方法会用到一些较为复杂的数学，但基本思想就是：每一个正有理数都能通过有限的步数走到.

# 问题

到现在为止，我们能想到的无限大好像都是一样大的。会不会“无限大”的意思就是单纯的“不受限制”的意思，而且这个概念本身并没有什么值得研究的意义呢？

# 问题

到现在为止，我们能想到的无限大好像都是一样大的。会不会“无限大”的意思就是单纯的“不受限制”的意思，而且这个概念本身并没有什么值得研究的意义呢？
几千年来，大家都是这么认为的。直到19世纪末，德国数学家康托(Georg Cantor 1845-1918)提出了一条革命性的见解...

# 一些无穷比另一些无穷要大

## 康托定理

康托: 0到1之间，小数点后只有4和5的实数就已经要比自然数还要多!

回顾：要证明两个东西一样多，我们只需展示一个一一对应。要证明两个东西不一样多，我们则需要证明不存在两者之间的一一对应。还记得我们要用到什么方法来证明一个东西不存在吗?

# 用反证法证明康托定理

证明：不存在方法将0到1之间小数点后只有4和5的实数跟自然数一一对应起来

# 用反证法证明康托定理

证明：不存在方法将0到1之间小数点后只有4和5的实数跟自然数一一对应起来

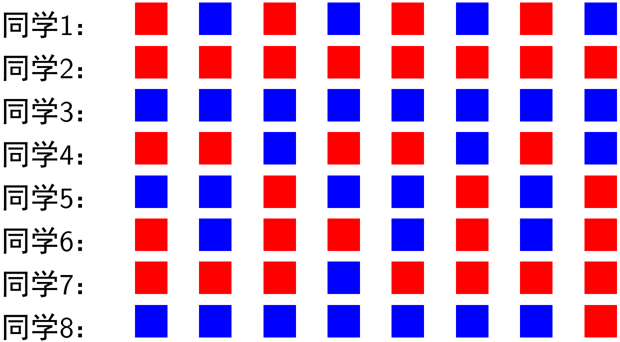
1. 假设有一个方法将0到1之间小数点后只有4和5的实数跟自然数一一对应起来（要推翻的假设），那么我们就可以把这些实数列出来

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 第1个： | 0. | 4 | 5 | 4 | 5 | 4 | 5 | 4 | 5 |
| 第2个： | 0. | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 第3个： | 0. | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 第4个： | 0. | 4 | 4 | 5 | 4 | 4 | 5 | 4 | 5 |
| 第5个： | 0. | 5 | 5 | 4 | 5 | 5 | 4 | 5 | 4 |
| 第6个： | 0. | 4 | 5 | 4 | 4 | 5 | 4 | 5 | 4 |
| 第7个： | 0. | 4 | 4 | 4 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 第8个： | 0. | 5 | 5 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 |

# 用反证法证明康托定理

证明：不存在方法将0到1之间小数点后只有4和5的实数跟自然数一一对应起来

1. 假设有一个方法将0到1之间小数点后只有4和5的实数跟自然数一一对应起来（要推翻的假设），那么我们就可以把这些实数列出来



# 用反证法证明康托定理

证明：不存在方法将0到1之间小数点后只有4和5的实数跟自然数一一对应起来

1. 假设有一个方法将0到1之间小数点后只有4和5的实数跟自然数一一对应起来（要推翻的假设），那么我们就可以把这些实数列出来

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | $\dots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | $S_1(1)$ | $S_1(2)$ | $S_1(3)$ | $S_1(4)$ | $S_1(5)$ | $S_1(6)$ | $S_1(7)$ | $S_1(8)$ | |
| $S_2$ | $S_2(1)$ | $S_2(2)$ | $S_2(3)$ | $S_2(4)$ | $S_2(5)$ | $S_2(6)$ | $S_2(7)$ | $S_2(8)$ | |
| $S_3$ | $S_3(1)$ | $S_3(2)$ | $S_3(3)$ | $S_3(4)$ | $S_3(5)$ | $S_3(6)$ | $S_3(7)$ | $S_3(8)$ | |
| $S_4$ | $S_4(1)$ | $S_4(2)$ | $S_4(3)$ | $S_4(4)$ | $S_4(5)$ | $S_4(6)$ | $S_4(7)$ | $S_4(8)$ | |
| $S_5$ | $S_5(1)$ | $S_5(2)$ | $S_5(3)$ | $S_5(4)$ | $S_5(5)$ | $S_5(6)$ | $S_5(7)$ | $S_5(8)$ | |
| $S_6$ | $S_6(1)$ | $S_6(2)$ | $S_6(3)$ | $S_6(4)$ | $S_6(5)$ | $S_6(6)$ | $S_6(7)$ | $S_6(8)$ | |
| $S_7$ | $S_7(1)$ | $S_7(2)$ | $S_7(3)$ | $S_7(4)$ | $S_7(5)$ | $S_7(6)$ | $S_7(7)$ | $S_7(8)$ | |
| $S_8$ | $S_8(1)$ | $S_8(2)$ | $S_8(3)$ | $S_8(4)$ | $S_8(5)$ | $S_8(6)$ | $S_8(7)$ | $S_8(8)$ | |
| $\vdots$ | $\ddots$ | | | | | $\vdots$ | | | |
| $S_n$ | $S_n(1)$ | $S_n(2)$ | $S_n(3)$ | $S_n(4)$ | $S_n(5)$ | $S_n(6)$ | $S_n(7)$ | $S_n(8)$ | $\dots S_n(n) \dots$ |
| $\vdots$ | $\ddots$ | | | | | $\vdots$ | | | |

证明：不存在方法将0到1之间小数点后只有4和5的实数跟自然数一一对应起来

1. 假设有一个方法将0到1之间小数点后只有4和5的实数跟自然数一一对应起来（要推翻的假设），那么我们就可以把这些实数列出来

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | $S_1(1)$ | $S_1(2)$ | $S_1(3)$ | $S_1(4)$ | $S_1(5)$ | $S_1(6)$ | $S_1(7)$ | $S_1(8)$ | |
| $S_2$ | $S_2(1)$ | $S_2(2)$ | $S_2(3)$ | $S_2(4)$ | $S_2(5)$ | $S_2(6)$ | $S_2(7)$ | $S_2(8)$ | |
| $S_3$ | $S_3(1)$ | $S_3(2)$ | $S_3(3)$ | $S_3(4)$ | $S_3(5)$ | $S_3(6)$ | $S_3(7)$ | $S_3(8)$ | |
| $S_4$ | $S_4(1)$ | $S_4(2)$ | $S_4(3)$ | $S_4(4)$ | $S_4(5)$ | $S_4(6)$ | $S_4(7)$ | $S_4(8)$ | |
| $S_5$ | $S_5(1)$ | $S_5(2)$ | $S_5(3)$ | $S_5(4)$ | $S_5(5)$ | $S_5(6)$ | $S_5(7)$ | $S_5(8)$ | |
| $S_6$ | $S_6(1)$ | $S_6(2)$ | $S_6(3)$ | $S_6(4)$ | $S_6(5)$ | $S_6(6)$ | $S_6(7)$ | $S_6(8)$ | |
| $S_7$ | $S_7(1)$ | $S_7(2)$ | $S_7(3)$ | $S_7(4)$ | $S_7(5)$ | $S_7(6)$ | $S_7(7)$ | $S_7(8)$ | |
| $S_8$ | $S_8(1)$ | $S_8(2)$ | $S_8(3)$ | $S_8(4)$ | $S_8(5)$ | $S_8(6)$ | $S_8(7)$ | $S_8(8)$ | |
| $\vdots$ | $\ddots$ | | | | | $\vdots$ | | | |
| $S_n$ | $S_n(1)$ | $S_n(2)$ | $S_n(3)$ | $S_n(4)$ | $S_n(5)$ | $S_n(6)$ | $S_n(7)$ | $S_n(8)$ | ... $S_n(n)$... |
| $\vdots$ | $\ddots$ | | | | | $\vdots$ | | | |

# 用反证法证明康托定理

证明：不存在方法将0到1之间小数点后只有4和5的实数跟自然数一一对应起来

1. 假设有一个方法将0到1之间小数点后只有4和5的实数跟自然数一一对应起来，那么我们就可以把这些实数列出来。记为$S_1, S_2, \ldots$，其中$S_n(i)$指的是$S_n$小数点后第$i$位

# 用反证法证明康托定理

证明：不存在方法将0到1之间小数点后只有4和5的实数跟自然数一一对应起来

1. 假设有一个方法将0到1之间小数点后只有4和5的实数跟自然数一一对应起来，那么我们就可以把这些实数列出来。记为$S_1, S_2, \ldots$，其中$S_n(i)$指的是$S_n$小数点后第$i$位
2. 利用对角线法，定义实数$D$：它以“0.”开头，如果$S_n(n)$是4，那么它小数点后第$n$位就是5；如果$S_n(n)$是5，那么它小数点后第$n$位就是4

# 用反证法证明康托定理

证明：不存在方法将0到1之间小数点后只有4和5的实数跟自然数一一对应起来

1. 假设有一个方法将0到1之间小数点后只有4和5的实数跟自然数一一对应起来，那么我们就可以把这些实数列出来。记为$S_1, S_2, \ldots$，其中$S_n(i)$指的是$S_n$小数点后第$i$位
2. 利用对角线法，定义实数$D$：它以“0.”开头，如果$S_n(n)$是4，那么它小数点后第$n$位就是5；如果$S_n(n)$是5，那么它小数点后第$n$位就是4
3. 但是根据开头的假设，这些$S_n$已经列举所有的0到1之间小数点后只有4和5的实数了，而$D$是这样一个实数，所以$D$也在列表中。比如说它是$S_k$

# 用反证法证明康托定理

证明：不存在方法将0到1之间小数点后只有4和5的实数跟自然数一一对应起来

1. 假设有一个方法将0到1之间小数点后只有4和5的实数跟自然数一一对应起来，那么我们就可以把这些实数列出来。记为$S_1, S_2, \ldots$，其中$S_n(i)$指的是$S_n$小数点后第$i$位
2. 利用对角线法，定义实数$D$：它以"0."开头，如果$S_n(n)$是4，那么它小数点后第$n$位就是5；如果$S_n(n)$是5，那么它小数点后第$n$位就是4
3. 但是根据开头的假设，这些$S_n$已经列举所有的0到1之间小数点后只有4和5的实数了，而$D$是这样一个实数，所以$D$也在列表中。比如说它是$S_k$
4. 因为$D = S_k$，所以$D$的第$k$位就是$S_k$的第$k$位

# 用反证法证明康托定理

证明：不存在方法将0到1之间小数点后只有4和5的实数跟自然数一一对应起来

1. 假设有一个方法将0到1之间小数点后只有4和5的实数跟自然数一一对应起来，那么我们就可以把这些实数列出来。记为$S_1, S_2, \ldots$，其中$S_n(i)$指的是$S_n$小数点后第$i$位
2. 利用对角线法，定义实数$D$：它以“0.”开头，如果$S_n(n)$是4，那么它小数点后第$n$位就是5；如果$S_n(n)$是5，那么它小数点后第$n$位就是4
3. 但是根据开头的假设，这些$S_n$已经列举所有的0到1之间小数点后只有4和5的实数了，而$D$是这样一个实数，所以$D$也在列表中。比如说它是$S_k$
4. 因为$D = S_k$，所以$D$的第$k$位就是$S_k$的第$k$位
5. 然而根据$D$的定义，$D$的第$k$位跟$S_k$的第$k$位相反

# 用反证法证明康托定理

证明：不存在方法将0到1之间小数点后只有4和5的实数跟自然数一一对应起来

1. 假设有一个方法将0到1之间小数点后只有4和5的实数跟自然数一一对应起来，那么我们就可以把这些实数列出来。记为$S_1, S_2, \dots$，其中$S_n(i)$指的是$S_n$小数点后第$i$位
2. 利用对角线法，定义实数$D$：它以“0.”开头，如果$S_n(n)$是4，那么它小数点后第$n$位就是5；如果$S_n(n)$是5，那么它小数点后第$n$位就是4
3. 但是根据开头的假设，这些$S_n$已经列举所有的0到1之间小数点后只有4和5的实数了，而$D$是这样一个实数，所以$D$也在列表中。比如说它是$S_k$
4. 因为$D = S_k$，所以$D$的第$k$位就是$S_k$的第$k$位
5. 然而根据$D$的定义，$D$的第$k$位跟$S_k$的第$k$位相反
6. 4和5构成了自相矛盾的结论，所以我们一开始的假设是错误的

# 用反证法证明康托定理

证明：不存在方法将0到1之间小数点后只有4和5的实数跟自然数一一对应起来

1. 假设有一个方法将0到1之间小数点后只有4和5的实数跟自然数一一对应起来，那么我们就可以把这些实数列出来。记为$S_1, S_2, \ldots$，其中$S_n(i)$指的是$S_n$小数点后第$i$位
2. 利用对角线法，定义实数$D$：它以“0.”开头，如果$S_n(n)$是4，那么它小数点后第$n$位就是5；如果$S_n(n)$是5，那么它小数点后第$n$位就是4
3. 但是根据开头的假设，这些$S_n$已经列举所有的0到1之间小数点后只有4和5的实数了，而$D$是这样一个实数，所以$D$也在列表中。比如说它是$S_k$
4. 因为$D = S_k$，所以$D$的第$k$位就是$S_k$的第$k$位
5. 然而根据$D$的定义，$D$的第$k$位跟$S_k$的第$k$位相反
6. 4和5构成了自相矛盾的结论，所以我们一开始的假设是错误的

**康托定理**

0到1之间，小数点后只有4和5的实数就已经要比自然数还要多

# 课间休息

实际上，我们可能很多人都曾经接触过对角线论证。

**理发师悖论（罗素）**

村子里有一个理发师，这个理发师的政策是："我只帮那些不为自己理发的人理发".

# 课间休息

实际上，我们可能很多人都曾经接触过对角线论证。

**理发师悖论（罗素）**

村子里有一个理发师，这个理发师的政策是："我只帮那些不为自己理发的人理发"。
如果小明帮小明理发，那么理发师就不会帮小明理发
如果小红不帮小红理发，那么理发师就会帮小红理发

# 课间休息

实际上，我们可能很多人都曾经接触过对角线论证。

**理发师悖论（罗素）**

村子里有一个理发师，这个理发师的政策是："我只帮那些不为自己理发的人理发"．
如果小明帮小明理发，那么理发师就不会帮小明理发
如果小红不帮小红理发，那么理发师就会帮小红理发

问：这位理发师帮不帮理发师自己理发？

- 如果理发师帮自己理发，那么理发师就不会帮自己理发

# 课间休息

实际上，我们可能很多人都曾经接触过对角线论证。

**理发师悖论（罗素）**

村子里有一个理发师, 这个理发师的政策是: “我只帮那些不为自己理发的人理发”.

如果小明帮小明理发, 那么理发师就不会帮小明理发

如果小红不帮小红理发, 那么理发师就会帮小红理发

问: 这位理发师帮不帮理发师自己理发?

- 如果理发师帮自己理发, 那么理发师就不会帮自己理发
- 如果理发师不帮自己理发, 那么理发师就会帮自己理发

# 课间休息

实际上，我们可能很多人都曾经接触过对角线论证。

**理发师悖论（罗素）**

村子里有一个理发师，这个理发师的政策是："我只帮那些不为自己理发的人理发".
如果小明帮小明理发，那么理发师就不会帮小明理发
如果小红不帮小红理发，那么理发师就会帮小红理发

问：这位理发师帮不帮理发师自己理发？

- 如果理发师帮自己理发，那么理发师就不会帮自己理发
- 如果理发师不帮自己理发，那么理发师就会帮自己理发

# 课间休息

实际上，我们可能很多人都曾经接触过对角线论证。

**理发师悖论（罗素）**

村子里有一个理发师，这个理发师的政策是："我只帮那些不为自己理发的人理发".
如果小明帮小明理发，那么理发师就不会帮小明理发
如果小红不帮小红理发，那么理发师就会帮小红理发

问：这位理发师帮不帮理发师自己理发？

- 如果理发师帮自己理发，那么理发师就不会帮自己理发
- 如果理发师不帮自己理发，那么理发师就会帮自己理发

是不是看着有点熟悉？

# 对角线是抽象的理发师，理发师是对角线的具体个例

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | $\dots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | $S_1(1)$ | $S_1(2)$ | $S_1(3)$ | $S_1(4)$ | $S_1(5)$ | $S_1(6)$ | $S_1(7)$ | $S_1(8)$ | |
| $S_2$ | $S_2(1)$ | $S_2(2)$ | $S_2(3)$ | $S_2(4)$ | $S_2(5)$ | $S_2(6)$ | $S_2(7)$ | $S_2(8)$ | |
| $S_3$ | $S_3(1)$ | $S_3(2)$ | $S_3(3)$ | $S_3(4)$ | $S_3(5)$ | $S_3(6)$ | $S_3(7)$ | $S_3(8)$ | |
| $S_4$ | $S_4(1)$ | $S_4(2)$ | $S_4(3)$ | $S_4(4)$ | $S_4(5)$ | $S_4(6)$ | $S_4(7)$ | $S_4(8)$ | |
| $S_5$ | $S_5(1)$ | $S_5(2)$ | $S_5(3)$ | $S_5(4)$ | $S_5(5)$ | $S_5(6)$ | $S_5(7)$ | $S_5(8)$ | |
| $S_6$ | $S_6(1)$ | $S_6(2)$ | $S_6(3)$ | $S_6(4)$ | $S_6(5)$ | $S_6(6)$ | $S_6(7)$ | $S_6(8)$ | |
| $S_7$ | $S_7(1)$ | $S_7(2)$ | $S_7(3)$ | $S_7(4)$ | $S_7(5)$ | $S_7(6)$ | $S_7(7)$ | $S_7(8)$ | |
| $S_8$ | $S_8(1)$ | $S_8(2)$ | $S_8(3)$ | $S_8(4)$ | $S_8(5)$ | $S_8(6)$ | $S_8(7)$ | $S_8(8)$ | |
| $\vdots$ | $\ddots$ | | | | | $\vdots$ | | | |
| $S_n$ | $S_n(1)$ | $S_n(2)$ | $S_n(3)$ | $S_n(4)$ | $S_n(5)$ | $S_n(6)$ | $S_n(7)$ | $S_n(8)$ | $\dots S_n(n) \dots$ |
| $\vdots$ | $\ddots$ | | | | | $\vdots$ | | | |

往$S_n(k)$里填入“是”或“否”，我们可以把这个表格理解为记录村子里第$n$个人是否为第$k$个人理发的表格。

# 对角线是抽象的理发师，理发师是对角线的具体个例

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | $\ldots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | $S_1(1)$ | $S_1(2)$ | $S_1(3)$ | $S_1(4)$ | $S_1(5)$ | $S_1(6)$ | $S_1(7)$ | $S_1(8)$ | |
| $S_2$ | $S_2(1)$ | $S_2(2)$ | $S_2(3)$ | $S_2(4)$ | $S_2(5)$ | $S_2(6)$ | $S_2(7)$ | $S_2(8)$ | |
| $S_3$ | $S_3(1)$ | $S_3(2)$ | $S_3(3)$ | $S_3(4)$ | $S_3(5)$ | $S_3(6)$ | $S_3(7)$ | $S_3(8)$ | |
| $S_4$ | $S_4(1)$ | $S_4(2)$ | $S_4(3)$ | $S_4(4)$ | $S_4(5)$ | $S_4(6)$ | $S_4(7)$ | $S_4(8)$ | |
| $S_5$ | $S_5(1)$ | $S_5(2)$ | $S_5(3)$ | $S_5(4)$ | $S_5(5)$ | $S_5(6)$ | $S_5(7)$ | $S_5(8)$ | |
| $S_6$ | $S_6(1)$ | $S_6(2)$ | $S_6(3)$ | $S_6(4)$ | $S_6(5)$ | $S_6(6)$ | $S_6(7)$ | $S_6(8)$ | |
| $S_7$ | $S_7(1)$ | $S_7(2)$ | $S_7(3)$ | $S_7(4)$ | $S_7(5)$ | $S_7(6)$ | $S_7(7)$ | $S_7(8)$ | |
| $S_8$ | $S_8(1)$ | $S_8(2)$ | $S_8(3)$ | $S_8(4)$ | $S_8(5)$ | $S_8(6)$ | $S_8(7)$ | $S_8(8)$ | |
| $\vdots$ | $\ddots$ | | | | | $\vdots$ | | | |
| $S_n$ | $S_n(1)$ | $S_n(2)$ | $S_n(3)$ | $S_n(4)$ | $S_n(5)$ | $S_n(6)$ | $S_n(7)$ | $S_n(8)$ | $\ldots S_n(n)\ldots$ |
| $\vdots$ | $\ddots$ | | | | | $\vdots$ | | | |

往$S_n(k)$里填入“是”或“否”，我们可以把这个表格理解为记录村子里第$n$个人是否为第$k$个人理发的表格。此时对角线法带来的则是：$D(n)=$ 是 当且仅当 $S_n(n)=$ 否；$D(n)=$ 否 当且仅当 $S_n(n)=$ 是。它就是罗素的理发师

# 应用2：语言的界限（塔斯基不可定义定理）

- 思想家一般会说类似这样的话: “我们追求真理”

# 应用2：语言的界限（塔斯基不可定义定理）

- 思想家一般会说类似这样的话："我们追求真理"
- "真理"是什么？"真"是什么意思？

# 应用2：语言的界限（塔斯基不可定义定理）

- 思想家一般会说类似这样的话: “我们追求真理”
- “真理”是什么? “真”是什么意思?
- 塔斯基(Alfred Tarski, 1901-1983)认为, 如果我们要定义“真”这个词的意思, 那么这个定义至少要符合下面这个标准

# 应用2：语言的界限（塔斯基不可定义定理）

- 思想家一般会说类似这样的话："我们追求真理"
- "真理"是什么？"真"是什么意思？
- 塔斯基(Alfred Tarski, 1901-1983)认为，如果我们要定义"真"这个词的意思，那么这个定义至少要符合下面这个标准
- 一句话是真的，当且仅当这句话描述的内容符合事实

# 应用2：语言的界限（塔斯基不可定义定理）

- 思想家一般会说类似这样的话："我们追求真理"
- "真理"是什么？"真"是什么意思？
- 塔斯基(Alfred Tarski, 1901-1983)认为，如果我们要定义"真"这个词的意思，那么这个定义至少要符合下面这个标准
- 一句话是真的，当且仅当这句话描述的内容符合事实
- True("P") 当且仅当 P符合事实

# 应用2：语言的界限（塔斯基不可定义定理）

- 思想家一般会说类似这样的话: “我们追求真理”
- “真理”是什么? “真”是什么意思?
- 塔斯基(Alfred Tarski, 1901-1983)认为, 如果我们要定义“真”这个词的意思, 那么这个定义至少要符合下面这个标准
- 一句话是真的, 当且仅当这句话描述的内容符合事实
- True(“P”) 当且仅当 P符合事实
- True(“P”) 当且仅当 P

# 塔斯基

- 塔斯基考虑了那些可以描述自然数子集的语句

# 塔斯基

- 塔斯基考虑了那些可以描述自然数子集的语句
- 例“x是偶数”，“x是1”，“x大于100”...

# 塔斯基

- 塔斯基考虑了那些可以描述自然数子集的语句
- 例 “x是偶数”，“x是1”，“x大于100” ...
- 我们可以根据语句中的字词在字典中的顺序把这些语句排序为 “$S_1, S_2, S_3, \ldots$” .

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | $S_1(1)$ | $S_1(2)$ | $S_1(3)$ | $S_1(4)$ | $S_1(5)$ | $S_1(6)$ | $S_1(7)$ | $S_1(8)$ | |
| $S_2$ | $S_2(1)$ | $S_2(2)$ | $S_2(3)$ | $S_2(4)$ | $S_2(5)$ | $S_2(6)$ | $S_2(7)$ | $S_2(8)$ | |
| $S_3$ | $S_3(1)$ | $S_3(2)$ | $S_3(3)$ | $S_3(4)$ | $S_3(5)$ | $S_3(6)$ | $S_3(7)$ | $S_3(8)$ | |
| $S_4$ | $S_4(1)$ | $S_4(2)$ | $S_4(3)$ | $S_4(4)$ | $S_4(5)$ | $S_4(6)$ | $S_4(7)$ | $S_4(8)$ | |
| $S_5$ | $S_5(1)$ | $S_5(2)$ | $S_5(3)$ | $S_5(4)$ | $S_5(5)$ | $S_5(6)$ | $S_5(7)$ | $S_5(8)$ | |
| $S_6$ | $S_6(1)$ | $S_6(2)$ | $S_6(3)$ | $S_6(4)$ | $S_6(5)$ | $S_6(6)$ | $S_6(7)$ | $S_6(8)$ | |
| $S_7$ | $S_7(1)$ | $S_7(2)$ | $S_7(3)$ | $S_7(4)$ | $S_7(5)$ | $S_7(6)$ | $S_7(7)$ | $S_7(8)$ | |
| $S_8$ | $S_8(1)$ | $S_8(2)$ | $S_8(3)$ | $S_8(4)$ | $S_8(5)$ | $S_8(6)$ | $S_8(7)$ | $S_8(8)$ | |
| $\vdots$ | $\ddots$ | | | | | $\vdots$ | | | |
| $S_n$ | $S_n(1)$ | $S_n(2)$ | $S_n(3)$ | $S_n(4)$ | $S_n(5)$ | $S_n(6)$ | $S_n(7)$ | $S_n(8)$ | |
| $\vdots$ | $\ddots$ | | | | | $\vdots$ | | | |

向$S_n(k)$填入$T$或$F$。例如：$S_1(5) = T$表示的就是“$S_1$这句话里面的$x$换成5之后是一个真的语句”

# 塔斯基不可定义定理

前面说过，如果我们要给“真”下一个定义，那么这个定义至少需要满足:

# 塔斯基不可定义定理

前面说过，如果我们要给“真”下一个定义，那么这个定义至少需要满足：

**Tarski's Convention T**

对于任何语句P，True(“P”) 当且仅当 P

# 塔斯基不可定义定理

前面说过，如果我们要给“真”下一个定义，那么这个定义至少需要满足：

**Tarski's Convention T**

对于任何语句P，True(“P”) 当且仅当 P

$S_1(5) = T$的意思就是“$S_1$这句话里面的$x$换成5之后是一个真的语句”，也就是True(“$S_1(5)$”).

# 语言的界限

**塔斯基不可定义定理**

满足Convention T的“真”不可被定义

- 反证法：假设这样的对“真”的定义存在 (我们最终要推翻的假设)

# 语言的界限

**塔斯基不可定义定理**

满足Convention T的“真”不可被定义

- 反证法：假设这样的对“真”的定义存在 (我们最终要推翻的假设)
- 那么此时我们利用“真”的定义，我们将定义另一个语句，叫做句子$D$.

# 语言的界限

## 塔斯基不可定义定理

满足Convention T的“真”不可被定义

- 反证法：假设这样的对“真”的定义存在 (我们最终要推翻的假设)
- 那么此时我们利用“真”的定义，我们将定义另一个语句, 叫做句子$D$.
- 句子$D$：“$S_x(x)$不是真的”

# 语言的界限

**塔斯基不可定义定理**

满足Convention T的“真”不可被定义

- 反证法：假设这样的对“真”的定义存在 (我们最终要推翻的假设)
- 那么此时我们利用“真”的定义，我们将定义另一个语句，叫做句子$D$.
- 句子$D$：“$S_x(x)$不是真的”
- $D$是一个什么样的句子呢？

# 塔斯基不可定义定理

- 句子$D$的定义: $D(n) = T$ 当且仅当 $S_n(n) = F$; $D(n) = F$ 当且仅当 $S_n(n) = T$

# 塔斯基不可定义定理

- 句子$D$的定义: $D(n) = T$ 当且仅当 $S_n(n) = F$; $D(n) = F$ 当且仅当 $S_n(n) = T$
- 前面我们约定过, $D(n) = T$的意思是"句子$D$中的$x$换成$n$之后是真的句子", 也就是True($D(n)$)

# 塔斯基不可定义定理

- 句子$D$的定义: $D(n) = T$ 当且仅当 $S_n(n) = F$; $D(n) = F$ 当且仅当 $S_n(n) = T$
- 前面我们约定过, $D(n) = T$的意思是“句子$D$中的$x$换成$n$之后是真的句子”，也就是True($D(n)$)
- 结合前两点，句子D的定义可以理解成：True($D(n)$) 当且仅当 not-True($S_n(n)$)；not-True($D(n)$) 当且仅当 True($S_n(n)$)

# 塔斯基不可定义定理

- 句子D的定义： True($D(n)$) 当且仅当 not-True($S_n(n)$)；not-True($D(n)$) 当且仅当 True($S_n(n)$)

# 塔斯基不可定义定理

- 句子D的定义： True($D(n)$) 当且仅当 not-True($S_n(n)$)；not-True($D(n)$) 当且仅当 True($S_n(n)$)
- 句子$D$也是一个句子，那么句子D也会出现在$(S_1, S_2, S_3, ...)$这一个列表里的某一位。例如说$D = S_k$

# 塔斯基不可定义定理

- 句子D的定义： True($D(n)$) 当且仅当 not-True($S_n(n)$)；not-True($D(n)$) 当且仅当 True($S_n(n)$)
- 句子$D$也是一个句子，那么句子D也会出现在$(S_1, S_2, S_3, \ldots)$这一个列表里的某一位。例如说$D = S_k$
- 我们此时可以问: $D(k)$是个真句子吗?

# 塔斯基不可定义定理

- 句子D的定义： True($D(n)$) 当且仅当 not-True($S_n(n)$)；not-True($D(n)$) 当且仅当 True($S_n(n)$)
- 句子$D$也是一个句子，那么句子D也会出现在$(S_1, S_2, S_3, \ldots)$这一个列表里的某一位。例如说$D = S_k$
- 我们此时可以问: $D(k)$是个真句子吗?
- 如果True($D(k)$), 那么not-True($S_k(k)$)

# 塔斯基不可定义定理

- 句子D的定义： True($D(n)$) 当且仅当 not-True($S_n(n)$)；not-True($D(n)$) 当且仅当 True($S_n(n)$)
- 句子$D$也是一个句子，那么句子D也会出现在$(S_1, S_2, S_3, \ldots)$这一个列表里的某一位。例如说$D = S_k$
- 我们此时可以问: $D(k)$是个真句子吗?
- 如果True($D(k)$), 那么not-True($S_k(k)$)
- 如果not-True($D(k)$), 那么True($S_k(k)$)

# 塔斯基不可定义定理

- 句子D的定义： True($D(n)$) 当且仅当 not-True($S_n(n)$)；not-True($D(n)$) 当且仅当 True($S_n(n)$)
- 句子$D$也是一个句子，那么句子D也会出现在$(S_1, S_2, S_3, \ldots)$这一个列表里的某一位。例如说$D = S_k$
- 我们此时可以问: $D(k)$是个真句子吗?
- 如果True($D(k)$), 那么not-True($S_k(k)$)
- 如果not-True($D(k)$), 那么True($S_k(k)$)
- 但是根据我们的假设, $D$就是$S_k$!

# 塔斯基不可定义定理

- 句子D的定义： True$(D(n))$ 当且仅当 not-True$(S_n(n))$；not-True$(D(n))$ 当且仅当 True$(S_n(n))$
- 句子$D$也是一个句子，那么句子D也会出现在$(S_1, S_2, S_3, \ldots)$这一个列表里的某一位。例如说$D = S_k$
- 我们此时可以问: $D(k)$是个真句子吗?
- 如果True$(D(k))$, 那么not-True$(S_k(k))$
- 如果not-True$(D(k))$, 那么True$(S_k(k))$
- 但是根据我们的假设, $D$就是$S_k$!
- 这是个自相矛盾的结论, 所以我们一开始的假设是错误的

# 塔斯基不可定义定理

- 句子D的定义： True($D(n)$) 当且仅当 not-True($S_n(n)$)；not-True($D(n)$) 当且仅当 True($S_n(n)$)
- 句子$D$也是一个句子，那么句子D也会出现在$(S_1, S_2, S_3, \ldots)$这一个列表里的某一位。例如说$D = S_k$
- 我们此时可以问: $D(k)$是个真句子吗?
- 如果True($D(k)$), 那么not-True($S_k(k)$)
- 如果not-True($D(k)$), 那么True($S_k(k)$)
- 但是根据我们的假设, $D$就是$S_k$!
- 这是个自相矛盾的结论, 所以我们一开始的假设是错误的
- 符合塔斯基条件的“真”的定义不存在

# 塔斯基不可定义定理

实际上, 我们很多人可能都见过$D$这个句子.

- True($D(k)$) 当且仅当 $D(k)$, 当且仅当 not-True($S_k(k)$)
- 但$D$就是$S_k$
- 所以$S_k(k)$, 当且仅当 not-True($S_k(k)$)
- 也就是说, $S_k(k)$说的是: “$S_k(k)$不是真的”
- 这就是我们熟悉的说谎者悖论: “这句话是假的”.

# 应用3：数学的界限（哥德尔不完备定理）

- 从古至今，数学和逻辑讲究的是推理和证明

# 应用3：数学的界限（哥德尔不完备定理）

- 从古至今，数学和逻辑讲究的是推理和证明
- 拿算术举例，我们可能希望找到一些算术公理，并且从这些算术公理出发，我们可以证明出所有的算术事实，而且不会证明出错误的句子

# 应用3：数学的界限（哥德尔不完备定理）

- 从古至今，数学和逻辑讲究的是推理和证明
- 拿算术举例，我们可能希望找到一些算术公理，并且从这些算术公理出发，我们可以证明出所有的算术事实，而且不会证明出错误的句子
- 希尔伯特(David Hilbert, 1862-1943)纲领（粗略版本）：找到一组公理，能够推论出所有数学事实

# 应用3：数学的界限（哥德尔不完备定理）

- 从古至今，数学和逻辑讲究的是推理和证明
- 拿算术举例，我们可能希望找到一些算术公理，并且从这些算术公理出发，我们可以证明出所有的算术事实，而且不会证明出错误的句子
- 希尔伯特(David Hilbert, 1862-1943)纲领（粗略版本）：找到一组公理，能够推论出所有数学事实
- 哥德尔(Kurt Gödel, 1906-1978)在1931年利用对角线论证证明了这个希望是无法达成的.

# 应用3：数学的界限（哥德尔不完备定理）

- 从古至今，数学和逻辑讲究的是推理和证明
- 拿算术举例，我们可能希望找到一些算术公理，并且从这些算术公理出发，我们可以证明出所有的算术事实，而且不会证明出错误的句子
- 希尔伯特(David Hilbert, 1862-1943)纲领（粗略版本）：找到一组公理，能够推论出所有数学事实
- 哥德尔(Kurt Gödel, 1906-1978)在1931年利用对角线论证证明了这个希望是无法达成的.
- 我们只需要将塔斯基不可定义定理中的“True”改成“Provable”即可

# 哥德尔不完备定理

- 句子$D$的定义: Provable($D(n)$) 当且仅当 not-Provable($S_n(n)$); not-Provable($D(n)$) 当且仅当 Provable($S_n(n)$)

# 哥德尔不完备定理

- 句子$D$的定义: Provable($D(n)$) 当且仅当 not-Provable($S_n(n)$); not-Provable($D(n)$) 当且仅当 Provable($S_n(n)$)
- 根据上一个例子中的讨论, 句子$D$说就是: “这个句子无法被证明”

# 哥德尔不完备定理

- 句子$D$的定义: Provable($D(n)$) 当且仅当 not-Provable($S_n(n)$); not-Provable($D(n)$) 当且仅当 Provable($S_n(n)$)
- 根据上一个例子中的讨论, 句子$D$说就是: "这个句子无法被证明"
- 假设$D$能被证明, 那么$D$就是一个错误的句子

# 哥德尔不完备定理

- 句子$D$的定义: Provable($D(n)$) 当且仅当 not-Provable($S_n(n)$); not-Provable($D(n)$) 当且仅当 Provable($S_n(n)$)
- 根据上一个例子中的讨论, 句子$D$说就是: “这个句子无法被证明”
- 假设$D$能被证明, 那么$D$就是一个错误的句子
- 假设$D$无法被证明, 那么$D$就是一个算术事实

# 数学的界限

**哥德尔第一不完备定理（粗略的科普版本）**

一个能正确计算加法和乘法的算术公理体系，如果我们有办法写下它的公理，那么以下两者必定有一者成立：

- 有一个算术事实无法被该体系证明
- 该体系证明了一个错误的句子

# 应用4：计算机的界限（图灵停机问题）

20世纪初期，大家也很关注另一个问题：计算机是不是万能的？

**希尔伯特的判定性问题（Entscheidungsproblem, decision problem）**

存不存在这样一台计算机，使得任何有明确定义的问题，我们都可以把这个问题的数据输入给它，然后这台计算机就会计算出答案.

# 应用4：计算机的界限（图灵停机问题）

20世纪初期，大家也很关注另一个问题：计算机是不是万能的？

**希尔伯特的判定性问题（Entscheidungsproblem, decision problem）**

存不存在这样一台计算机，使得任何有明确定义的问题，我们都可以把这个问题的数据输入给它，然后这台计算机就会计算出答案.

给定车的数量，司机的心理态度，道路状况等，这台计算机就可以计算出某个时间的交通状况。又或者（回顾希尔伯特纲领）给定一个公理体系，判断一个命题能否被该公理体系证明）

# 应用4：计算机的界限（图灵停机问题）

20世纪初期，大家也很关注另一个问题：计算机是不是万能的？

**希尔伯特的判定性问题（Entscheidungsproblem, decision problem）**

存不存在这样一台计算机，使得任何有明确定义的问题，我们都可以把这个问题的数据输入给它，然后这台计算机就会计算出答案.

给定车的数量，司机的心理态度，道路状况等，这台计算机就可以计算出某个时间的交通状况。又或者（回顾希尔伯特纲领）给定一个公理体系，判断一个命题能否被该公理体系证明）

可惜，通过他发明的图灵机，阿兰图灵(Alan Turing, 1912-1954)于1936年证明了这样一台计算机不可能存在。

# 停机问题

图灵考虑的问题叫做“停机问题”。

# 停机问题

图灵考虑的问题叫做“停机问题”。 一台计算机，给定一些初始数据，就会开始运转，如果这个运算最后得到了一个结果，那这台计算机就会停止运转并且给出这个结果(停机)。

# 停机问题

图灵考虑的问题叫做"停机问题"。 一台计算机，给定一些初始数据，就会开始运转，如果这个运算最后得到了一个结果，那这台计算机就会停止运转并且给出这个结果(停机)。如果没有得到结果，或者出了bug，那它就会无止尽地跑下去，就不会停机。

# 停机问题

图灵考虑的问题叫做“停机问题”。 一台计算机，给定一些初始数据，就会开始运转，如果这个运算最后得到了一个结果，那这台计算机就会停止运转并且给出这个结果(停机)。如果没有得到结果，或者出了bug，那它就会无止尽地跑下去，就不会停机。

## 停机问题

存不存在一台计算机，它可以正确判断别的计算机会不会停机？这台计算机输入的数据就是“某台计算机+初始数据”，它的输出是1当且仅当那台计算机在输入了那些初始数据的情况下会停机；反之则是0

# 停机问题

图灵思考这个问题的时候也用到了对角线法

简单来说，如果给定一台计算机$S$，我们可以问：如果输入1，它会不会停机，如果输入2，它会不会停机，如果输入3，它会不会停机...

# 停机问题

图灵思考这个问题的时候也用到了对角线法

简单来说，如果给定一台计算机$S$，我们可以问：如果输入1，它会不会停机，如果输入2，它会不会停机，如果输入3，它会不会停机...

我们已经很熟悉这样的设定了：

# 停机问题

图灵思考这个问题的时候也用到了对角线法

简单来说，如果给定一台计算机$S$，我们可以问：如果输入1，它会不会停机，如果输入2，它会不会停机，如果输入3，它会不会停机...

我们已经很熟悉这样的设定了：

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \ldots \\
S_1 & S_1(1) & S_1(2) & S_1(3) & S_1(4) & S_1(5) & S_1(6) & S_1(7) & S_1(8) & \\
S_2 & S_2(1) & S_2(2) & S_2(3) & S_2(4) & S_2(5) & S_2(6) & S_2(7) & S_2(8) & \\
S_3 & S_3(1) & S_3(2) & S_3(3) & S_3(4) & S_3(5) & S_3(6) & S_3(7) & S_3(8) & \\
S_4 & S_4(1) & S_4(2) & S_4(3) & S_4(4) & S_4(5) & S_4(6) & S_4(7) & S_4(8) & \\
S_5 & S_5(1) & S_5(2) & S_5(3) & S_5(4) & S_5(5) & S_5(6) & S_5(7) & S_5(8) & \\
S_6 & S_6(1) & S_6(2) & S_6(3) & S_6(4) & S_6(5) & S_6(6) & S_6(7) & S_6(8) & \\
S_7 & S_7(1) & S_7(2) & S_7(3) & S_7(4) & S_7(5) & S_7(6) & S_7(7) & S_7(8) & \\
S_8 & S_8(1) & S_8(2) & S_8(3) & S_8(4) & S_8(5) & S_8(6) & S_8(7) & S_8(8) & \\
\vdots & \ddots & & & & & \vdots & & & \\
S_n & S_n(1) & S_n(2) & S_n(3) & S_n(4) & S_n(5) & S_n(6) & S_n(7) & S_n(8) & \ldots S_n(n) \ldots \\
\vdots & \ddots & & & & & \vdots & & &
\end{array}
$$

# 一个小问题

**疑问**

“等一下，我们前面能把句子/村民/颜色等排序成$(S_1, S_2, S_3, \ldots)$，可是计算机要怎么来这样排序呢？”

# 一个小问题

**疑问**

“等一下，我们前面能把句子/村民/颜色等排序成$(S_1, S_2, S_3, \ldots)$，可是计算机要怎么来这样排序呢？”

**计算机科学的核心基础假设：邱奇-图灵论题**

任何我们能想象出来的计算机(量子计算机，人工智能，算盘，数手指,...)都等价于某一个图灵机

**事实（Alan Turing, Alonzo Church）**

每一个图灵机都能被一个自然数所表示

# 一个小问题

**疑问**

“等一下，我们前面能把句子/村民/颜色等排序成$(S_1, S_2, S_3, \ldots)$，可是计算机要怎么来这样排序呢？”

**计算机科学的核心基础假设：邱奇-图灵论题**

任何我们能想象出来的计算机(量子计算机，人工智能，算盘，数手指,...)都等价于某一个图灵机

**事实（Alan Turing, Alonzo Church）**

每一个图灵机都能被一个自然数所表示

这样一来，通过列举图灵机，我们就能够列举出所有的计算机。这允许我们用对角线法来证明停机问题无法解决。

# 停机问题无法解决

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | $S_1(1)$ | $S_1(2)$ | $S_1(3)$ | $S_1(4)$ | $S_1(5)$ | $S_1(6)$ | $S_1(7)$ | $S_1(8)$ | |
| $S_2$ | $S_2(1)$ | $S_2(2)$ | $S_2(3)$ | $S_2(4)$ | $S_2(5)$ | $S_2(6)$ | $S_2(7)$ | $S_2(8)$ | |
| $S_3$ | $S_3(1)$ | $S_3(2)$ | $S_3(3)$ | $S_3(4)$ | $S_3(5)$ | $S_3(6)$ | $S_3(7)$ | $S_3(8)$ | |
| $S_4$ | $S_4(1)$ | $S_4(2)$ | $S_4(3)$ | $S_4(4)$ | $S_4(5)$ | $S_4(6)$ | $S_4(7)$ | $S_4(8)$ | |
| $S_5$ | $S_5(1)$ | $S_5(2)$ | $S_5(3)$ | $S_5(4)$ | $S_5(5)$ | $S_5(6)$ | $S_5(7)$ | $S_5(8)$ | |
| $S_6$ | $S_6(1)$ | $S_6(2)$ | $S_6(3)$ | $S_6(4)$ | $S_6(5)$ | $S_6(6)$ | $S_6(7)$ | $S_6(8)$ | |
| $S_7$ | $S_7(1)$ | $S_7(2)$ | $S_7(3)$ | $S_7(4)$ | $S_7(5)$ | $S_7(6)$ | $S_7(7)$ | $S_7(8)$ | |
| $S_8$ | $S_8(1)$ | $S_8(2)$ | $S_8(3)$ | $S_8(4)$ | $S_8(5)$ | $S_8(6)$ | $S_8(7)$ | $S_8(8)$ | |
| $\vdots$ | $\ddots$ | | | | | $\vdots$ | | | |
| $S_n$ | $S_n(1)$ | $S_n(2)$ | $S_n(3)$ | $S_n(4)$ | $S_n(5)$ | $S_n(6)$ | $S_n(7)$ | $S_n(8)$ | $\ldots S_n(n) \ldots$ |
| $\vdots$ | $\ddots$ | | | | | $\vdots$ | | | |

$S_5(1) = 1$的意思是“编号为5的计算机。在初始数据是1的时候会停机”.

- 假设判断停机问题的计算机存在，那么我们就能定义一个计算机$D$

- 假设判断停机问题的计算机存在，那么我们就能定义一个计算机$D$
- 计算机$D$的定义是: $D(n) = 1$当且仅当 $S_n(n) = 0$; $D(n) = 0$ 当且仅当 $S_n(n) = 1$

- 假设判断停机问题的计算机存在，那么我们就能定义一个计算机$D$
- 计算机$D$的定义是: $D(n)=1$当且仅当 $S_n(n)=0$; $D(n)=0$ 当且仅当 $S_n(n)=1$
- （图灵的深刻贡献之一就在于证明了这样的定义确实定义了一个计算机，这是计算机科学中著名的 "递归定理"）

- 假设判断停机问题的计算机存在，那么我们就能定义一个计算机$D$
- 计算机$D$的定义是: $D(n)=1$当且仅当 $S_n(n)=0$; $D(n)=0$ 当且仅当 $S_n(n)=1$
- （图灵的深刻贡献之一就在于证明了这样的定义确实定义了一个计算机，这是计算机科学中著名的 "递归定理"）
- $D$在输入$n$的情况下会停机，当且仅当$S_n$在输入$n$的情况下不停机

- 假设判断停机问题的计算机存在，那么我们就能定义一个计算机$D$
- 计算机$D$的定义是: $D(n) = 1$当且仅当 $S_n(n) = 0$; $D(n) = 0$ 当且仅当 $S_n(n) = 1$
- （图灵的深刻贡献之一就在于证明了这样的定义确实定义了一个计算机，这是计算机科学中著名的 "递归定理"）
- $D$在输入$n$的情况下会停机，当且仅当$S_n$在输入$n$的情况下不停机
- 根据前面几个例子里类似的讨论，我们可以知道：$D$不可能出现在这个列表里

- 假设判断停机问题的计算机存在，那么我们就能定义一个计算机$D$
- 计算机$D$的定义是: $D(n)=1$当且仅当 $S_n(n)=0$; $D(n)=0$ 当且仅当 $S_n(n)=1$
- （图灵的深刻贡献之一就在于证明了这样的定义确实定义了一个计算机，这是计算机科学中著名的 "递归定理"）
- $D$在输入$n$的情况下会停机，当且仅当$S_n$在输入$n$的情况下不停机
- 根据前面几个例子里类似的讨论，我们可以知道：$D$不可能出现在这个列表里
- 也就是说，可以解决停机问题的计算机不存在

# 回顾

我们今天讨论的内容:

- 如何优雅地让自己成功拖延美术作业
- 从上面的解法中提炼出对角线法
- 将对角线法和它适用的框架进行抽象
- 对角线法在无穷集合上的应用: 康托定理
- 对角线法在语言上的应用：塔斯基不可定义定理
- 对角线法在证明上的应用：哥德尔不完备定理
- 对角线法在计算机上的应用：停机问题不可解决